

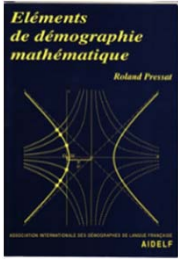
Cours d'analyse démographique (modèles de population) (Master de démographie) par Alexandre Avdeev

## Deuxième partie : Modèles de populations

### Introduction : Principes de modélisation

Présentation du cours – bibliographie et lectures - notion d'un modèle -  
élément d'un modèle - objet de modélisation en démographie etc.

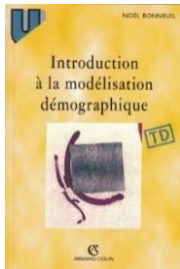
# Manuels et lecture



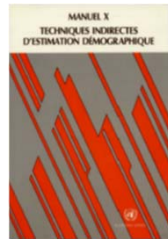
\*\*\* Roland Pressat (1995) *Eléments de démographie mathématique*. Paris. AIDELF, 279 p. (ISBN 2-9509356-0-5; ISSN 1160-1531)



\*\* Jean Bougeois-Pichat (1994) *La Dynamique des Populations*. Paris, PUF. Série « Travaux et Document » de l'INED, Cahier n°133, 296 p. ISBN-10: 2733201336 ; ISBN-13: 978-2733201336



\* Noël Bonneuil (1997) *Introduction à la modélisation démographique: 26 problèmes corrigés*. Paris : Armand Colin, 128 p.



\*\*\* Nations Unies (1984) *Manuel X. Techniques indirectes d'estimation démographiques*. United Nations Publication. New York ST/ESA/SER.A/81 Téléchargeable en français et en anglais :

[http://unstats.un.org/unsd/demographic/standmeth/handbooks/Manuel\\_X-fr.pdf](http://unstats.un.org/unsd/demographic/standmeth/handbooks/Manuel_X-fr.pdf)  
[http://www.un.org/esa/population/publications/Manual\\_X/Manual\\_X.htm](http://www.un.org/esa/population/publications/Manual_X/Manual_X.htm)

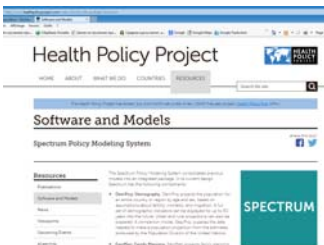


\*\*\* Manuel en ligne : *Population Analysis for Policies & Programmes*. Paris, Paris: International Union for the Scientific Study of Population (IUSSP). Disponible sur <https://papp.iussp.org/index.html>



\*\* IUSSP, *Outils d'estimation démographique* disponible sur

<http://demographicestimation.iussp.org/fr/content/outils-d%E2%80%99estimation-d%C3%A9mographique-0>



\*\*\* Les manuels pour “Spectrum Policy Modeling System” = *Spectrum* by Futures groups

– (en français) sur <http://www.healthpolicyproject.com/index.cfm?id=software&get=Spectrum>

version 6.08 (12 Mai 2021) disponible sur “Avenir Health” <https://www.avenirhealth.org/software-spectrum.php>



Tous les matériaux de ce cours (présentations, exercices etc. sont disponibles sur l'EPI : [https://cours.univ-paris1.fr/fixe/IDUP\\_modeles-de-populations](https://cours.univ-paris1.fr/fixe/IDUP_modeles-de-populations)

Les matériaux du cours M 1 « Analyse démographique » sont disponibles sur [https://cours.univ-paris1.fr/fixe/IDUP\\_M1-Analyse-Demographique](https://cours.univ-paris1.fr/fixe/IDUP_M1-Analyse-Demographique)

et bien sûr avec beaucoup d'autres cours sur <http://dmo.econ.msu.ru/teaching/>

# Objectifs et structure du cours

- Dans la première partie du cours :
  - on étudiait les méthodes de construction des indicateurs démographiques et de description formelle (formalisation) des populations (effectif, structures) et des phénomènes démographiques (mortalité, fécondité, nuptialité)
  - on cherchait à présenter (ou à réduire) les phénomènes sociaux extrêmement complexes avec des abstractions simplificatrices de nature quantitative. Ex. g. : la fécondité s'est transformée à l'indice synthétique de fécondité ; la population a été réduite à un nombre (effectifs) ou à une série de nombres et de relations (rapport de sexes etc.)
  - nos calculs des indicateurs et leurs interprétations se sont basés sur l'hypothèse sur la stationnarité (i.e. un modèle de la population stationnaire)
  - on examinait en quelle mesure la dynamique réelle d'un phénomène démographique correspond à la dynamique ses indicateurs descripteurs et inversement (*e.g. dynamique du TFT et dynamique du nombre moyen d'enfants*)
  - en résumé : on étudiait les principes (et les règles) de la quantification des objets / des phénomènes démographiques, de construction des indicateurs et les interprétations des scores de ces indicateurs
- Dans la deuxième partie du cours, on s'intéressera aux rapports quantitatifs entre les indicateurs démographiques du point de vue systémique
  - on va chercher les liens quantitatifs entre les indicateurs
  - on va formaliser ces liens ou de les présenter sous forme des équations mathématiques
  - on va essayer de trouver les lois fondamentales de ces liens

# Objectif, vocation et missions de la modélisation démographique

- **Les modèles démographiques sont des** descriptions mathématiques et *systemiques* des populations et des phénomènes relatifs à son mouvement, elles sont non contradictoires et conformes aux observations statistiques.
- **L'objectif ou le but principale de la modélisation démographique** est de mettre en évidence les liens entre les caractéristiques quantitatives des phénomènes et des objets démographiques afin **d'établir à partir des résultats d'études empiriques les règles mathématiques d'estimation** des caractéristiques quantitatives (paramètres) des *objets inaccessibles pour l'observation directe* à partir caractéristiques observées ou prédéfinies des autres objets.
- **La vocation d'un modèle démographique** est de fournir au chercheur des instruments fiables *pour des prévisions du comportement d'un objet démographique* dans de diverses *situations réelles et imaginées* afin de résoudre des problèmes pratiques de gestion et de trouver une stratégie optimale des politiques de population.
- **La mission essentielle** de la modélisation démographique est de produire les estimateurs fiables de tous les paramètres du modèle pour qu'il soit le plus adéquat au comportement d'un objet démographique réel.

# Un modèle est une image simplifiée de la réalité :

## les avantages des modèles

### 1. Une possibilité d'évaluer la qualité des données et de réparer leurs défauts :

- ✓ La comparaison avec un modèle permet de repérer des particularités des données observées y compris celles liées aux erreurs d'observation et de l'enregistrement.
- ✓ Le modèle permet de distinguer l'évolution tendancielle et des fluctuations aléatoires, de lisser (réparer) les données non régulières ou remplir des lacunes d'observation.

### 2. Une estimation indirecte des indicateurs démographiques :

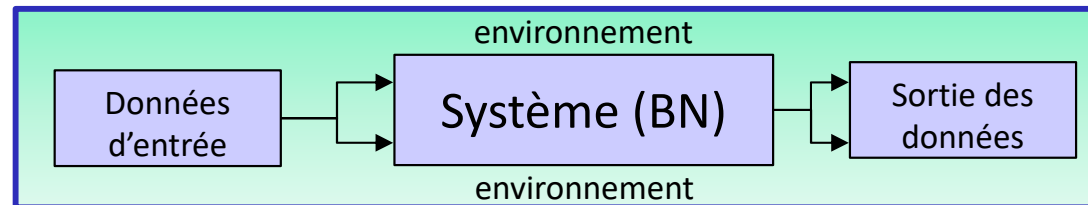
- ✓ Avec le recours aux méthodes statistiques il est plus facile d'estimer un ou deux que plusieurs paramètres.
- ✓ Un modèle permet aussi d'estimer les variables (les paramètres) non observées

### 3. Études des facteurs de l'évolution démographique:

- ✓ **L'interprétation qualitative** des paramètres des modèles démographiques est le plus souvent transparente et sans équivoque (âge moyen, calendrier etc.).
- ✓ La dynamique des valeurs (score) d'un paramètre illustre l'évolution du comportement démographique (en réalité quand on parle d'un phénomène démographique, de fait il s'agit d'un paramètre : fécondité = TFT; mortalité =  $e_0$ ; vieillissement =  $S_{60}/S_0$ ; etc.)
- ✓ Les modèles permettent de mettre en évidence les relations causales entre les phénomènes démographiques et non démographiques

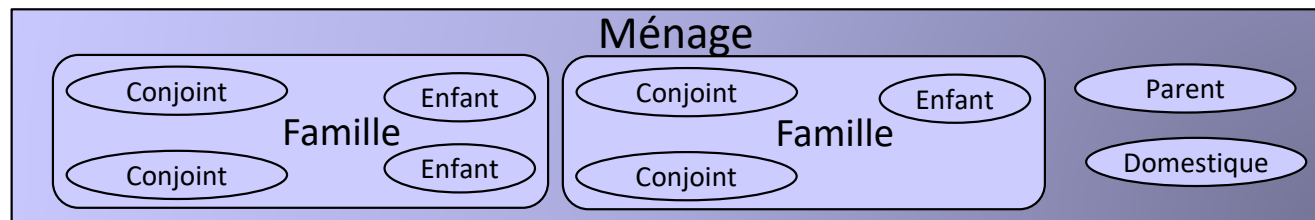
# Types des modèles

- **Boite noire (BN):** une image la plus simple de la réalité sans moindre information sur la nature et l'essence du système (fer à repasser électrique pour un simple utilisateur)



problème d'application: il se peut que les systèmes différents produisent les mêmes effets

- **Modèle de composition:** une image structurée d'un système (éléments, sous-systèmes), e.g. un organigramme



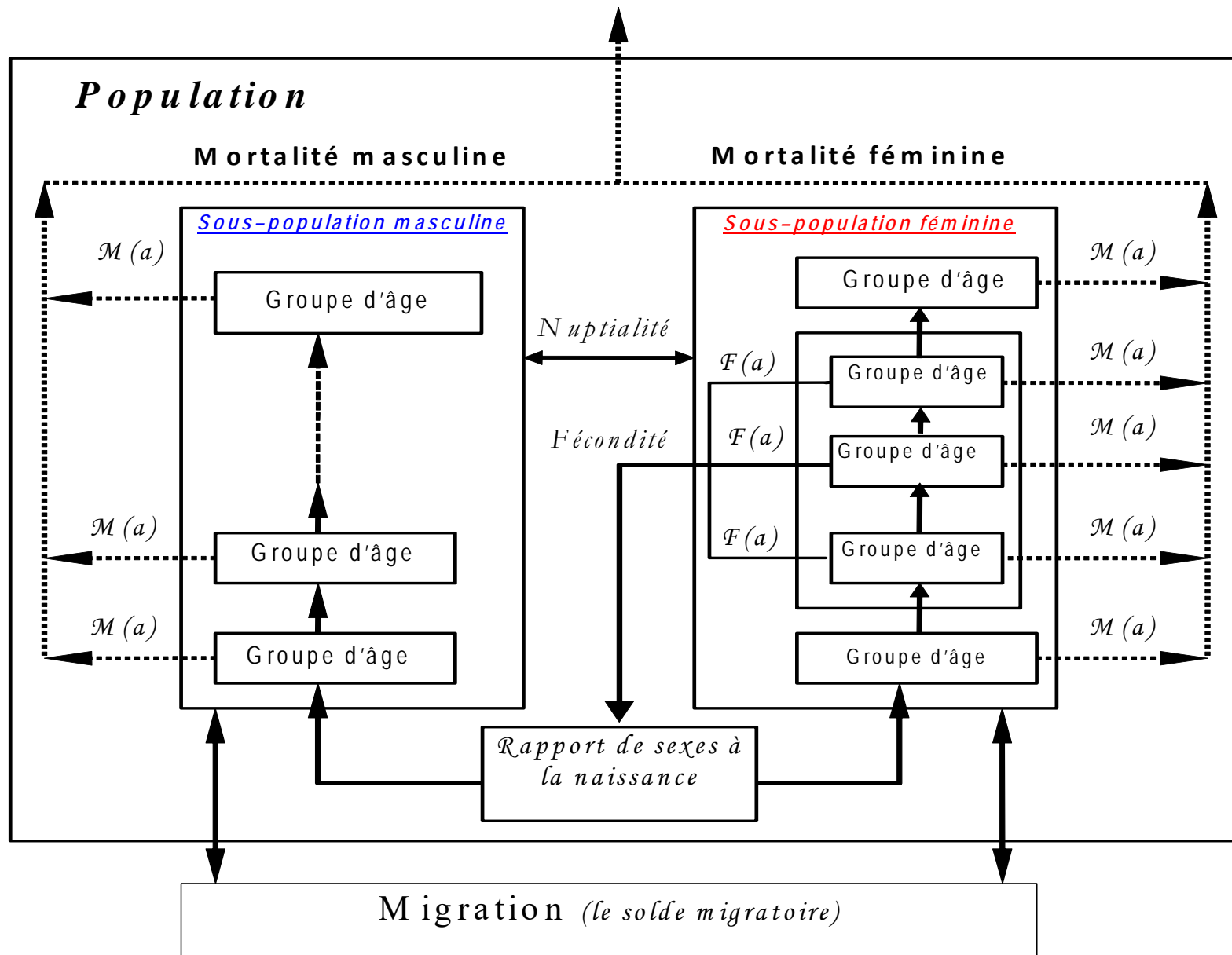
problème d'application: on peut produire les modèles différents en fonction

- 1) de nos connaissances,
- 2) de différentes définitions (approches à la définition) des éléments (catégorie),
- 3) de nos objectifs

e.g. le modèle de l'université du point de vue de l'administration, de l'étudiant et de l'enseignant n'est pas forcément le même

- **Modèle de structure (boite blanche) :** une image structurée d'un système (éléments, sous-systèmes) avec liens entre les éléments et les sous-systèmes, leurs fonctions, leur hiérarchie, les limites de fonctionnement, leurs relations avec l'environnement etc. (fer à repasser électrique pour un électricien)

# Modèle dynamique d'une population comme un système d'autoreproduction



# Formes des modèles (démographiques)

## Modèle dynamique généralisé:

Soit  $y(t)$  et  $x(t)$  sont deux variables (**aléatoire**) datées, on peut donc décrire leur interrelation générale par :

$$y(t) = \alpha + \beta_0 * y(t - 1) + \beta_1 * x(t) + \beta_2 * x(t - 1) + \varepsilon(t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta_i$  sont paramètres du modèle généralisé et  $\varepsilon(t)$  est le résidu qui est une valeur aléatoire non expliquée par le modèle, telle que  $E(\varepsilon) \approx 0$ , ou  $E(\varepsilon) \rightarrow 0$

Dans ce cas la variable  $y(t)$  est considérée comme dépendante (on dit : expliqué, endogène, output etc.), et  $x(t)$  comme une variable explicative (on dit : indépendante, exogène, régresseur, input etc.)

## **Modèles restreints (spécifiques, les cas particuliers du dynamique modèle généralisé):**

1. Modèle statique :  $y(t) = \alpha + \beta * x(t) + \varepsilon(t)$
2. Modèle autorégressif (à retard) :  $y(t) = \alpha + \beta * y(t - 1) + \varepsilon(t)$
3. Modèle à anticipation :  $y(t) = \alpha + \beta * x(t - 1) + \varepsilon(t)$
4. Modèle à anticipation distribuée:  $y(t) = \alpha + \beta_0 * x(t) + \beta_1 * x(t - 1) + \varepsilon(t)$
5. Modèle d'accroissement:  $y'(t) = \alpha + \beta * x(t) + \varepsilon(t)$
6. Modèle de la corrélation partielle:  $y(t) = \alpha + \beta_0 * y(t - 1) + \beta_1 * x(t) + \varepsilon(t)$

**S'il y a plusieurs variables explicatives on écrit :**

$$y(t) = \alpha + \sum_i [\beta_i * x_i(t)] + \varepsilon(t) \rightarrow \text{cocktail avec } i=1,2,\dots,n \text{ (ingrédients)}$$



# Étapes de construction d'un modèle démographique

- **Deux types d'informations de départ :**

- Qualitatives → des concepts généraux démographiques, sociologiques, psychologiques, économiques etc.
- Quantitatives → les résultantes des observations (les séries chronologiques plus ou moins longues, les séries de distributions plus ou moins stables)

- **Étapes de construction :**

- Spécification du modèle et la quantification des paramètres. Exemples :
  - fécondité →  $TFT = \sum f_i \times w_i$  ;
  - utilisation de la contraception → % des femmes âgées de 15-49 ans qui utilisent les moyens de la contraception ; etc.
- Collecte et traitement des données empiriques
- Estimation quantitative des paramètres du modèle (calculs des indicateurs – estimateurs)
- Vérification de l'adéquation /conformité du modèle à la réalité (études historiques et comparatives)

- **Notions et définition de base :**

- **objet / phénomènes** → populations, natalité, mortalité, fécondité, migration etc.
- **variables / système des indicateurs descripteurs**
  - à chaque état d'un objet correspond une valeur concrète d'un indicateur qui l'incarne (on dit « le niveau » : en 2008 la fécondité en France = 1,99 => ISF=1,99)
  - la nature de l'indicateur est constante, mais le niveau est variable, par conséquent, on parle des « variables démographiques »
- **modèle** est une expression mathématique des liens entre les indicateurs descripteurs (variables) de l'objet, un modèle peut être représenté comme
  - un graphique ou une série de graphiques
  - comme un tableau ou une série des tables
  - comme un système des équations et/ou des inéquations

# Spécification et classification des modèles et des variables

**Spécification d'un modèle** est une description détaillée du comportement d'un objet à l'aide du langage mathématique

## Premier principe de la spécification d'un modèle:

Un modèle se réalise comme une traduction en langage mathématique des lois (des régularités) induites par **la théorie démographique générale** ou à partir de l'observation d'expériences particulières.

Ex.: fécondité vs éducation  $\rightarrow F = a_0 + a_1 E + \varepsilon$  ou  $F = Y(E) : F$  et  $E$  – variables,  $a_0$  et  $a_1$  – paramètres  $\Rightarrow (a_0, a_1) > 0$

**Variable endogène** (dépendante) est une variable qui se forme à l'intérieur du modèle (ses scores sont produits par le modèle même) ex.:  $F$

**Question: (spécification de F=? Probabilité ? Catégorie ?)**

**Variable exogène** (indépendantes) est une variable dont les scores sont formés à l'extérieur du modèle ex:  $E$

## Classification des modèles:

On appelle « **modèles fermés** » ceux qui ne comportent que des variables endogènes

On appelle « **modèles ouverts** » ceux qui comportent au moins une variable exogène

## Second principe de la spécification d'un modèle :

dans un modèle le nombre d'équations doit être égal au nombre de variables endogènes (ce principe est important pour la vérification que la transcription du modèle soit correcte)

## Troisième principe de la spécification d'un modèle démographique :

il est nécessaire que les variables soient toujours rapportées à un moment de temps

On appelle « **modèles dynamiques** » (modèles de *séries temporelles*) ceux dont les variables sont dépendantes du temps

On appelle « **variables datées** » ou variables temporaires celles qui varient en fonction de temps

# Résumé

- Un modèle démographique est une représentation mathématique de liens entre les variables d'un objet démographique
- Modèles démographiques sont composés des variables et des paramètres
- On distingue les variables internes (endogènes) et les variables externe (exogène)
- Modèle peut comporter plusieurs équations (système d'équations) ou une seule équation isolée
- Première étape de la construction d'un modèle est sa spécification
- Il y a trois principes de spécification :
  - de l'exprimer en langage mathématique
  - que le nombre d'équations soit au moins égal au nombre de variables endogène
  - les variables doivent être définies en fonction de temps, si cela est possible
- Modèle peut représenter des graphiques, des tableaux ou/et des expressions analytiques (équations)
- Modélisation est nécessaire pour présenter les états d'un objet qu'on ne peut pas observés directement

# Quelques exemples des autorégressifs (modèles d'évolution)

**Modèles à retard échelonné**  $\rightarrow y_t = \alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot x_{t-i} + \varepsilon_t$   $\beta_0$  – multiplicateur à court terme  
 $\sum \beta_i$  – multiplicateurs à long terme

une variable endogène datée d'un moment (période) donné est dépendante des variables exogènes datées des moments (périodes) antérieurs

**Exemple** : tiré du modèle « World 3 » Cf. Dennis L. Meadows Dynamics of Growth in a Finite World, Wright-Allen Press, 1974, 367 p.

$$DTF_t = \delta \cdot N(i_{t-20}) \cdot RN(i_{t-3}) \cdot M(e_{t-20})$$

$DTF_t$  – la fécondité désirée ;

$N(i_{t-20})$  – la norme de taille de la famille (fonction de  $i(t-20)$  - la production industrielle par habitant il y a 20 ans) ;

$RN(i_{t-3})$  – la réaction de la famille à la norme (fonction de  $i(t-3)$  ;

$M(e_{t-20})$  – l'influence de la mortalité infantile (fonction de  $e_o(t-20)$  – espérance de vie à la naissance il y a 20 ans).

Modèle « World 3 » : outil de simulation sur <https://insightmaker.com/> (anciennement sur [simgua.com](http://simgua.com))

**Modèles (à retard) autorégressif**  $\rightarrow y_t = \alpha + \sum_{i=0}^k \beta_i \cdot x_{t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \cdot y_{t-i} + \varepsilon_t$

une variable endogène datée d'un moment (période) donné est dépendante des variables endogènes datées des *moments (périodes) antérieur(e)s*

**Exemple**: modèle de croissance de la population  $P_t = P_{t-i} \cdot e^{r \cdot i}$

$P_t$  – l'effectif d'une population au moment  $t$  ;  $i$  – un intervalle de temps ;  $r$  – le taux d'accroissement

# Exemple du modèle simple : « prédateurs – proies » (les équations de Lotka-Volterra)

Soit:

$x$  – effectif des proies

$y$  – effectif des prédateurs

$\alpha$  – taux de reproduction des proies (constant, indépendant de  $X$ )

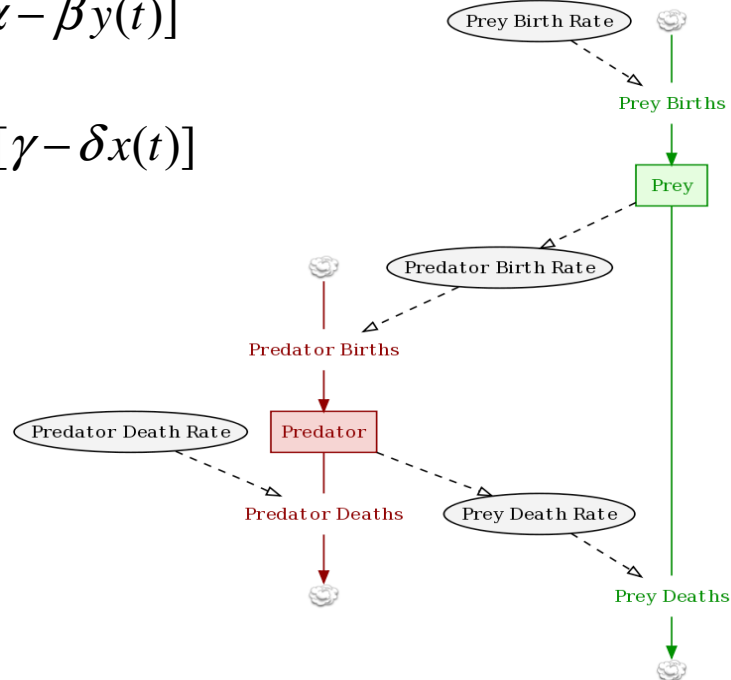
$\beta$  – taux d'élimination des proies par les prédateurs

$\delta$  – taux de reproduction des prédateurs en fonction de la nourriture (proies mangées)

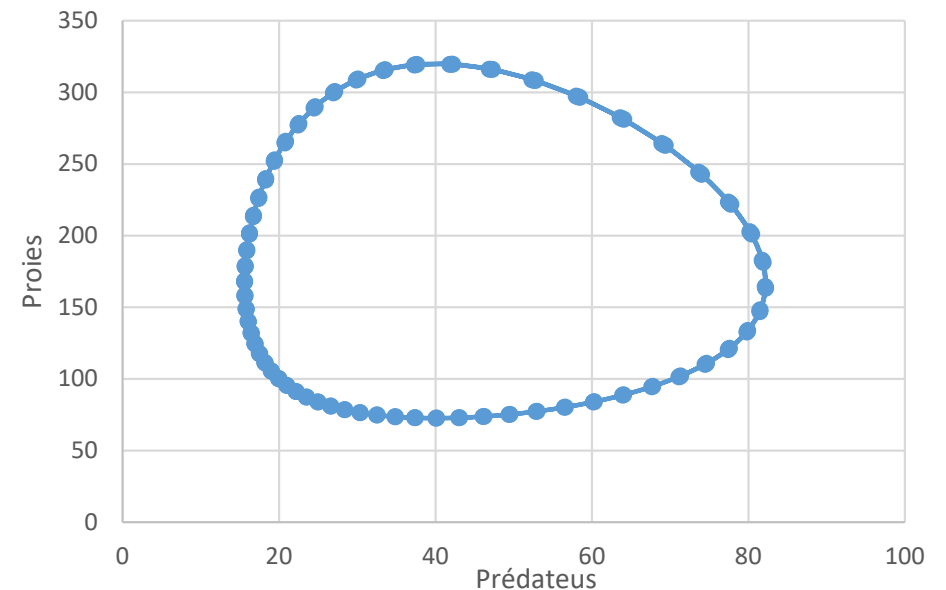
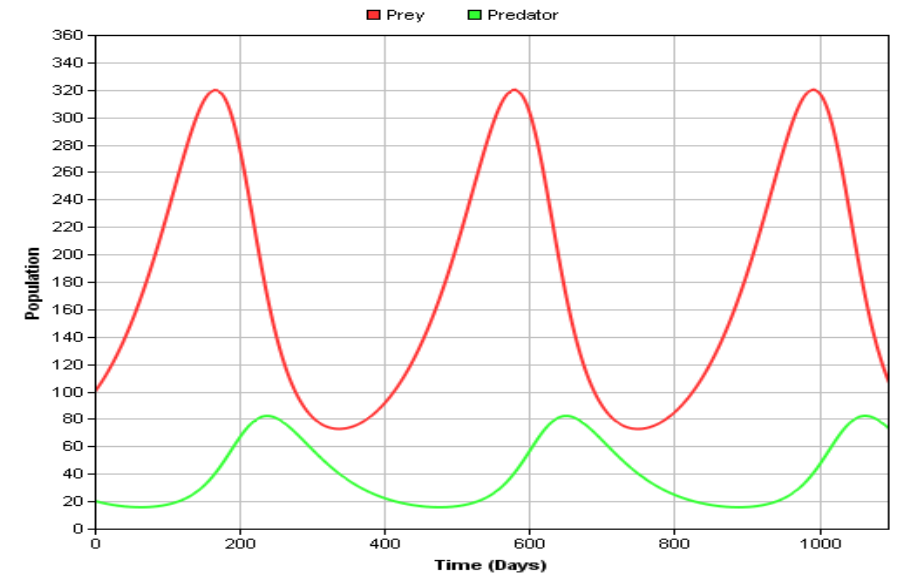
$\gamma$  – taux de mortalité de prédateurs (indépendant de  $Y$ )

## Grappe relationnel

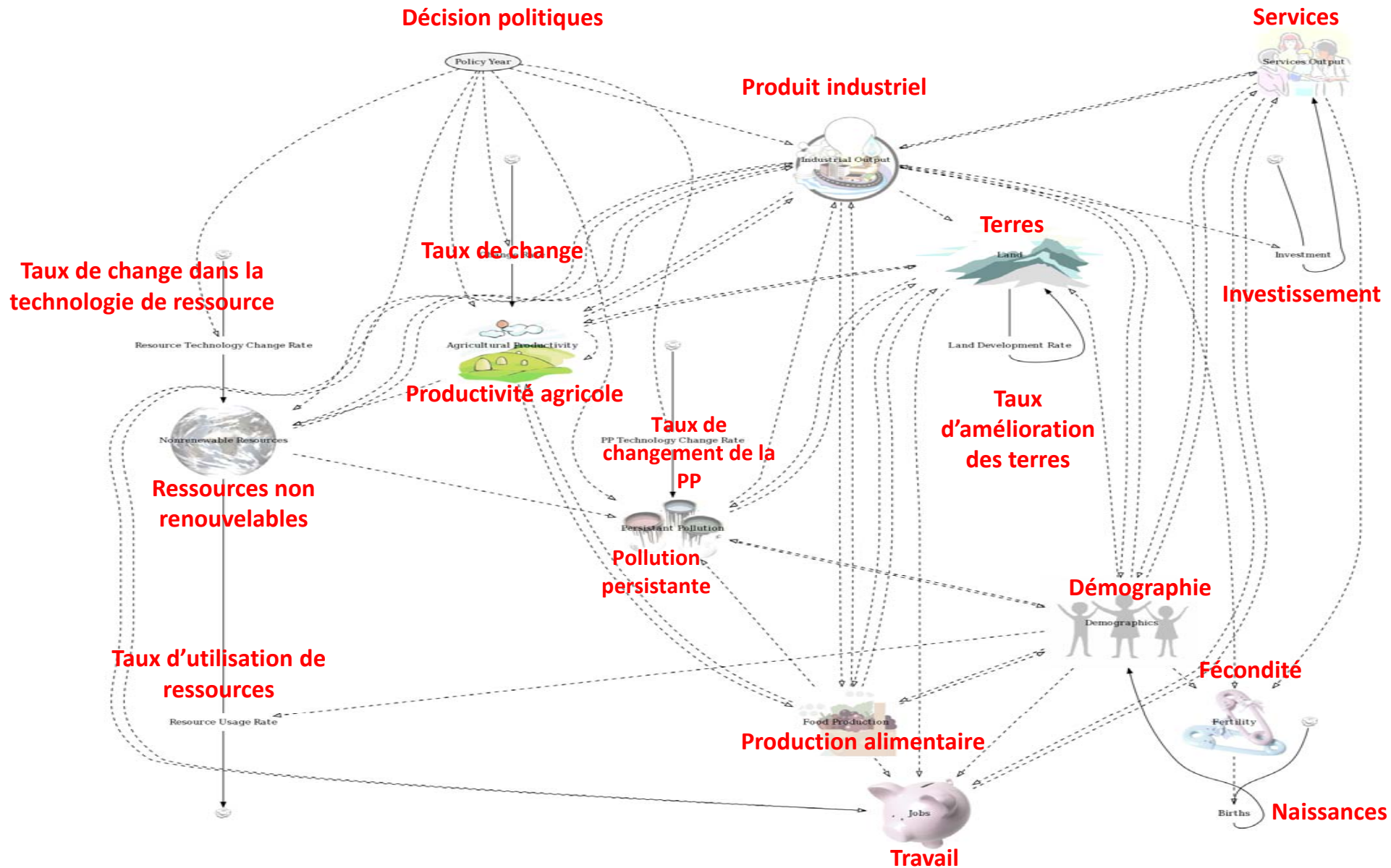
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \cdot [\alpha - \beta y(t)] \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) \cdot [\gamma - \delta x(t)] \end{array} \right.$$



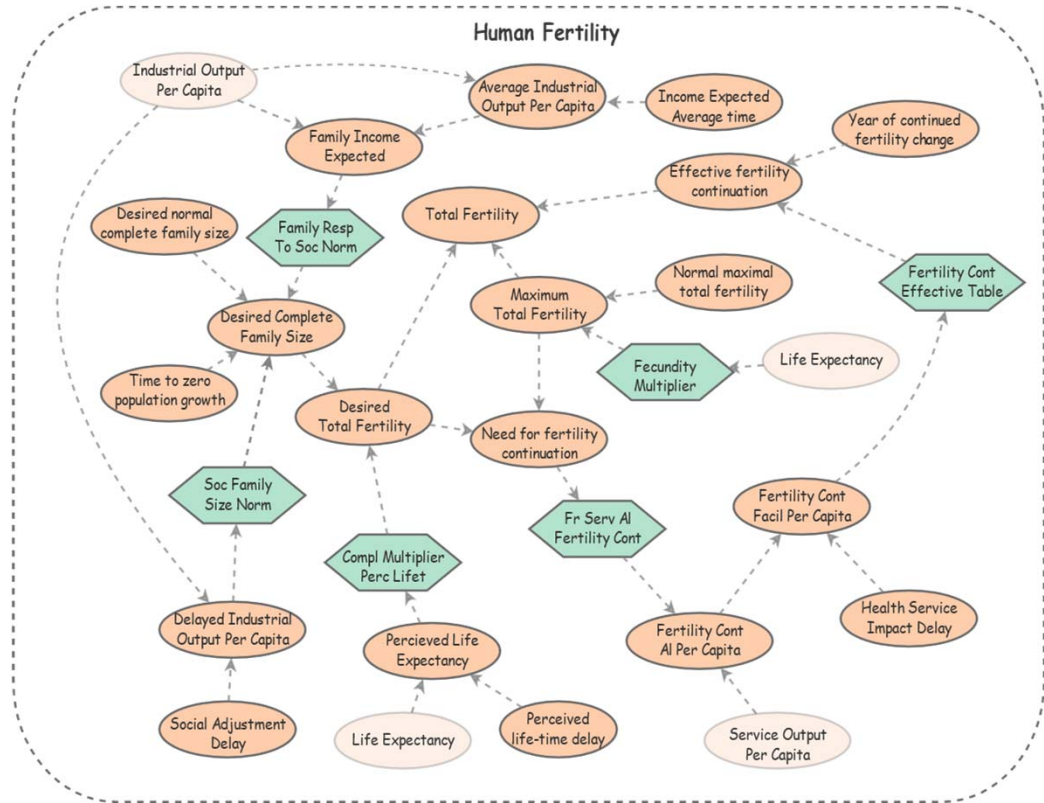
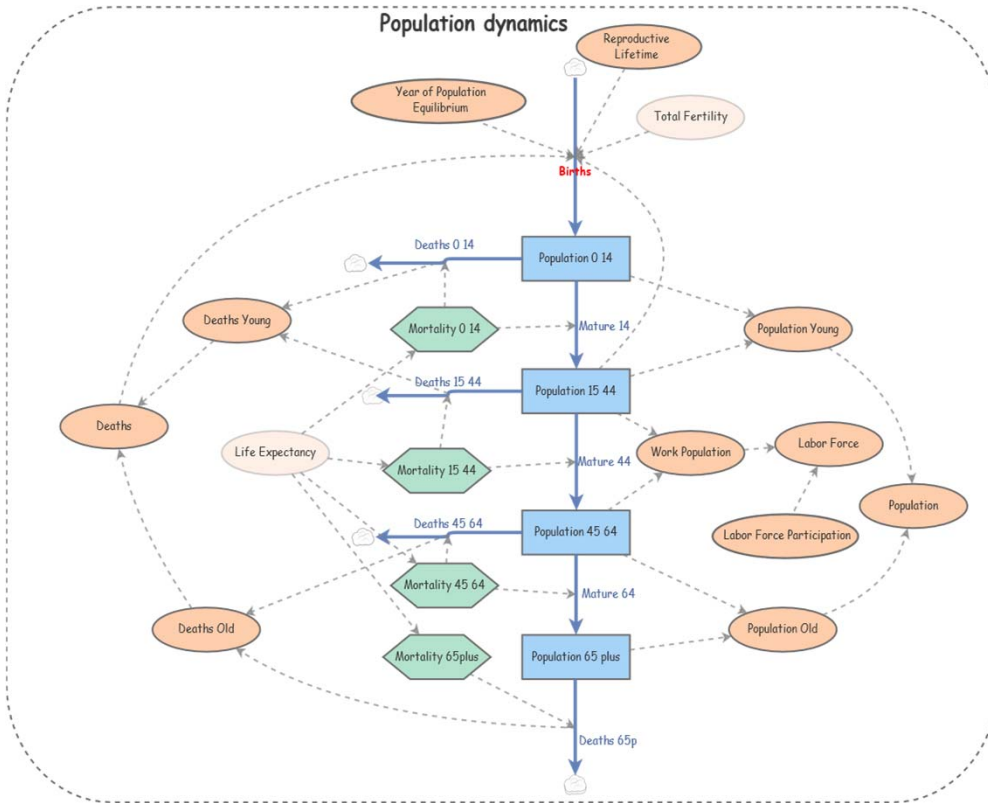
## Résultats de la simulation



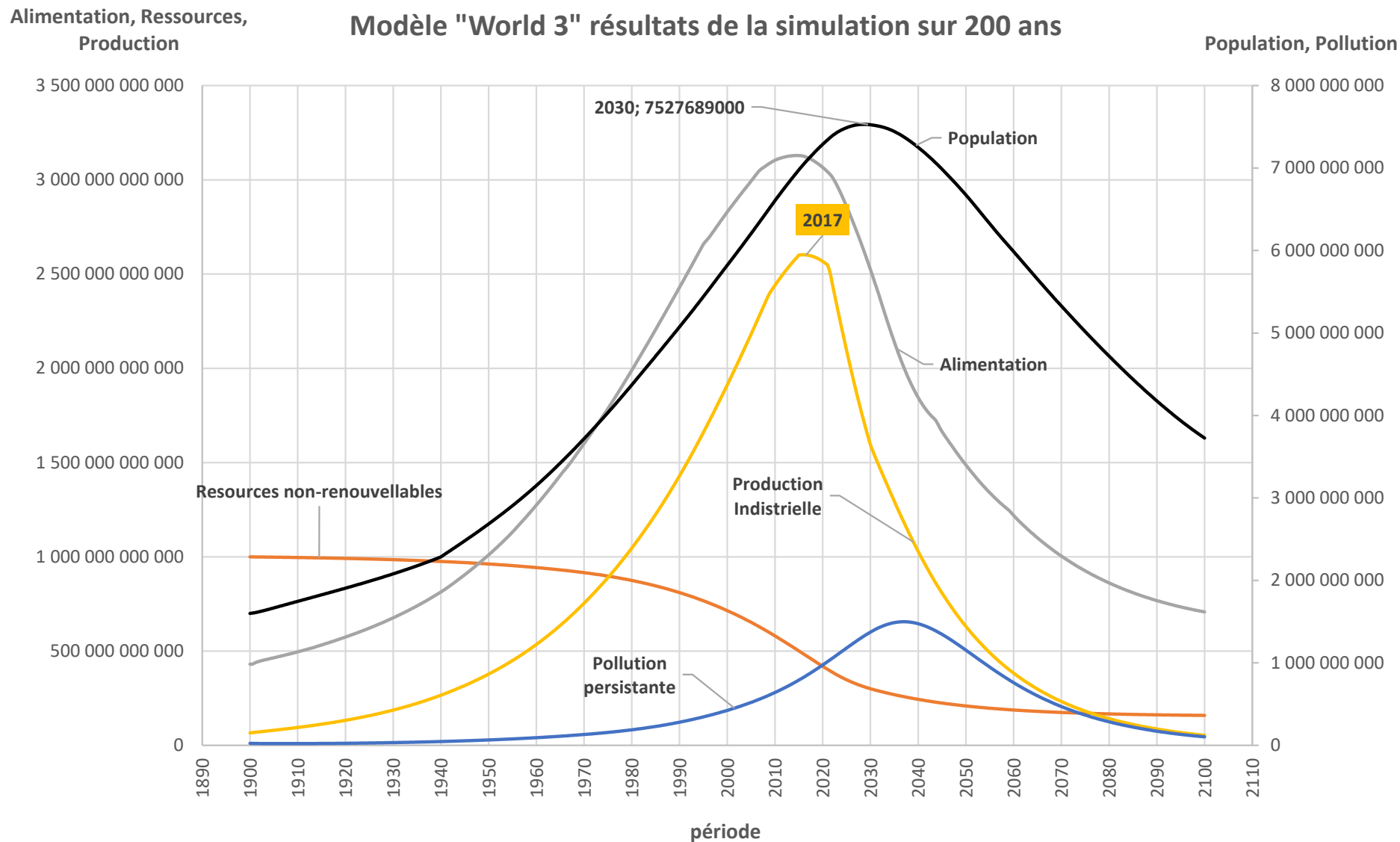
# Exemple du modèle de la dynamique mondiale



# Composantes “Dynamique de la population” et “Fécondité Humane” du modèle World-3



# Exemple de la modélisation de la dynamique mondiale avec des équations structurelles





# Exercice

Présenter sur un graph les relations entre les effectifs des célibataires, des mariés et des veufs sans distinction des sexes dans une populations fermée à la migration

- Spécifiez le modèle avec l'écriture symbolique (ex.g.  $C(t)$  – effectif des célibataires)
- Définissez les statistiques et les données dont vous avez besoin pour estimer les paramètres de votre modèle
- Listez les hypothèses sur les transitions entre différents états
- Quelles études faut-il envisager pour que ce modèle soit opérationnel

Développez le modèle pour deux sexes distincts en y introduisant les conditions intrinsèques de cohérence.

Il est conseillé d'utiliser un outil approprié comme draw.io (<https://app.diagrams.net/> version en ligne ou desktop)

**Vous êtes libres de choisir un autre phénomène démographique ou socio-démographique pour cet exercice**