

INSTITUT DE DÉMOGRAPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS



Cours « Les principes de l'Analyse démographique » Master 1e année par Alexandre Avdeev,

Compléments pour le cours sur l'analyse de la fécondité

Notes complémentaires aux matériaux de base disponibles dans les EPI de l'Université Panthéon Sorbonne



Les notes préliminaires

A la différence

- de l'analyse de la mortalité basée sur le modèle d'attrition d'une population avec le temps (modèle de survie),
 - d'où vient la nature probabiliste des indicateurs (paramètres) de la mortalité
 - et son universalité (applicable à tout passage d'un état à un autre et aux ensembles des objets animés (par ex. les humains, les muches, etc.) et inanimés (par ex. les voitures, les ordinateurs etc.)
- et de l'analyse de la nuptialité visant la formation des couples basée sur le modèle de combinatoire/permutation,
 - cependant on peut réduire l'analyse de nuptialité à un modèle de survie i.e. premiers mariages ou la primo-nuptialité et y appliquer les principes de la théorie de probabilité
 - sa nature est aussi universelle puisque ce modèle est applicable à tout ensemble humain où l'accouplement a lieu

l'analyse de la fécondité s'intéresse à la production des naissances (fécondité=productivité)

- cette productivité dépend des facultés physiologiques des espèces (la durée de la vie féconde, la fertilité biologique, la durée de gestation, la portée de gestation etc.) qui imposent les limites à cette productivité
- bien qu'il y ait la possibilité de *réduire l'analyse de la fécondité à un modèle de survie*, cette réduction est très compliquée et suppose de passer à l'analyse de la maternité où remplacer la production des naissances par les accouchements (ce qui convient pour les protozoaires avec la mitose, et non pour celle avec la schizogonie)
- cependant, pour les espèces ayant la gestation à portée unique (dont les humains) cette réduction se réalise dans le modèle d'une table de fécondité qui (table) n'est pas applicable aux espèces ayant la gestation à portée multiple...
- donc par leur nature les paramètres (indicateurs) de la fécondité
 - ne correspondent pas aux exigences de la théorie de probabilité
 - ne sont pas vraiment autorisés pour certaines opérations mathématiques (additions, multiplication)

Natalité et fécondité :

En démographie (francophone) la notion de la natalité est un élément de l'équation fondamental du mouvement de la population:

En termes du volume :

[Accroissement naturel durant une période t] = [nombre de naissances] – [nombre de décès] $ightarrow AN_t = N_t - D_t$

En termes des nombres réduits à l'effectif de la population (exposée) :

[taux d'accroissement naturel] = [taux brut de natalité] – [taux brut décès]
$$\Rightarrow \frac{AN_t}{\overline{P} \cdot t} = \frac{N_t}{\overline{P} \cdot t} + \frac{D_t}{\overline{P} \cdot t} = TBAN = TBN - TBD$$

En français on dit « la dénatalité » pour identifier une situation où : $N_t < D_t$ et par conséquent TBN < TBD.

Cependant une interprétation du niveau du *TBN* et respectivement l'explication des causes de la dénatalité sont difficiles puisque la production des naissances ne dépend que d'une partie de la population à savoir des femmes à l'âge de procréer (de 15 à 50 ans).

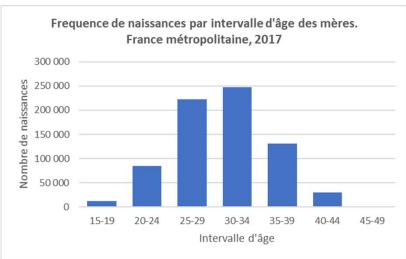
Le niveau du **TBN** dépend donc

- 1) de la part des femmes 15-49 ans $\binom{35\overline{W}_{15}}{\overline{P}_{t}}$; et
- 2) de leur productivité procréatrice qu'on peut quantifier comme le rapport *le nombre de naissance à la population féminine* âgées 15-49 exposée pendant une période *t*. On appelle ce ratio

le taux de fécondité générale (TFG) :
$$TFG_t = \frac{N_t}{35\overline{W}_{15} \cdot t} \rightarrow TBN_t = \frac{N_t}{35\overline{W}_{15}} \cdot \frac{35\overline{W}_{15}}{\overline{P}_t} = TFG \cdot \frac{35\overline{W}_{15}}{\overline{P}_t}$$

En conclusion: la natalité (taux brut de natalité) dépend de la fécondité générale (taux de fécondité générale) et de la structure de population par sexe et par âge (proportion des femmes de l'âge 15-49 ans).

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : fécondité réduite où les taux de fécondité par âge



				Taux de	Population type			Population		Nombre de
				fécondité	(immortelle)		Nombre de	féminine	Nombre de	naissances
	Amplitude	Nombre	Nombre de	par âge	au début de	Population	naissances	de table de	naissances	de filles
Intervalle	d'intervalle	de	femmes	(tfsa) pour	l'intervalle	immortelle	(population	mortalité	(population	(population
d'âge	d'âge	naissances	(exposées)	1000	d'âge	exposée	immortelle)	(So=10000)	de table)	de table)*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(3)/(4)	(6)	(7)=(6)x(2)	(8)=(7)x(5)	(9)	(10)=(9)x(5)	(11)=δ x (10)
15-19	5	12 501	1 924 553	6.50	1 000	5000	32.5	49 757	323.2	157.7
20-24	5	84 402	1 787 600	47.22	1 000	5000	236.1	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	5	222 883	1 906 032	116.94	1 000	5000	584.7	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	5	247 604	2 011 783	123.08	1 000	5000	615.4	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	5	130 801	2 072 822	63.10	1 000	5000	315.5	49 486	3 122.7	1 523.3
40-44	5	29 870	2 080 585	14.36	1 000	5000	71.8	49 318	708.0	345.4
45-49	5	1 960	2 210 607	0.89	1 000	5000	4.4	49 039	43.5	21.2
total		730 021	13 993 982			35000	1 860.3		18 455.3	9 002.6

Données pour cet exemple: France métro, 2017 ; fichier: ...\Fecondite\Lexis pour fecondite.xlsx

 δ – la proportion de filles parmi les naissances moyenne (indépendamment de l'âge des mères) ou spécifique à l'âge

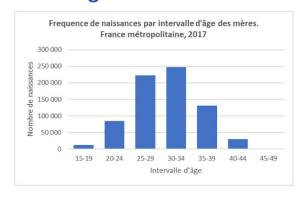
$$TFG = \frac{N}{\overline{W}_{15-49} \cdot t} = \frac{730021}{13.993.892 \cdot 1} \cdot 1000 = 52,17\%$$

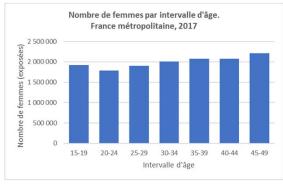
Soit les naissances réduites par âge ou taux de fécondité spécifique à l'âge - TFSA

$$TFSA \equiv {}_{n} f_{x} = \frac{{}_{n} N_{x}}{\sqrt{W}_{x} \cdot t};$$
 ${}_{5} f_{15} = \frac{12501}{1194553 \cdot 1} \cdot 1000 = 6,50\%;$

puisque les taux par âge sont annualisés $_5 f_{15}$ s'applique à 5 intervalles annuels d'âge: 15, 16, 17,18 et 19

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : rapport entre les taux de fécondité par âge et le taux global de fécondité





					Population					
				Taux de	type			Population		Nombre de
					(immortelle)		Nombre de	féminine	Nombre de	
	Amplitude	Nombre	Nombre de		au début de	Population	naissances	de table de	naissances	de filles
Intervalle	d'intervalle		femmes	(tfsa) pour	l'intervalle	immortelle	(population	mortalité	(population	
d'âge	d'âge	naissances	(exposées)	1000	d'âge	exposée	immortelle)	(So=10000)	de table)	de table)*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(3)/(4)	(6)	(7)=(6)x(2)	(8)=(7)x(5)	(9)	(10)=(9)x(5)	(11)=δ x (10)
15-19	5	12 501	1 924 553	6.50	1 000	5000	32.5	49 757	323.2	157.7
20-24	5	84 402	1 787 600	47.22	1 000	5000	236.1	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	5	222 883	1 906 032	116.94	1 000	5000	584.7	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	5	247 604	2 011 783	123.08	1 000	5000	615.4	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	5	130 801	2 072 822			5000	315.5			
40-44	5	29 870				5000	71.8			
45-49	5	1 960				5000	4.4			
total	3	730 021			1 000	35000	1 860.3		18 455.3	

Taux de fécondité générale

$$TFG = \frac{N}{\overline{W} \cdot t}$$

Taux de fécondité spécifique à l'âge

$$TFSA \equiv {}_{n}f_{x} = \frac{{}_{n}N_{x}}{{}_{n}\overline{W}_{x} \cdot t};$$

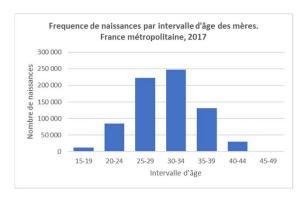
On voit bien que
$$TFG = \frac{\sum_{x=15}^{45} {}_{n}N_{x}}{\sum_{x=15}^{45} {}_{n}\overline{W}_{x} \cdot t} = \frac{\sum_{x=15}^{45} {}_{n}f_{x} \cdot {}_{n}\overline{W}_{x} \cdot t}{\sum_{x=15}^{45} {}_{n}\overline{W}_{x} \cdot t} = \sum_{x=15}^{45} {}_{n}f_{x} \cdot \frac{{}_{n}\overline{W}_{x}}{\sum_{x=15}^{45} {}_{n}\overline{W}_{x}};$$

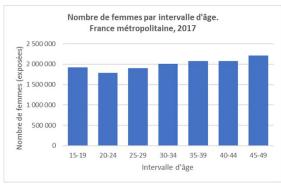
Le taux de fécondité générale n'est qu'une moyenne des taux par âge pondérés par la structure par âge des femmes à l'âge fécond, il dépend donc de la fécondité par âge et de la structure de la population \rightarrow ce n'est un indicateur parfait de de fécondité

On voit que les taux de fécondité varient beaucoup avec l'âge et aussi bien que la structure de la population par âge, pour neutraliser l'effet de la structure par âge on peut recourir à la standardisation (directe en l'occurrence)

5

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : la standardisation ou une élimination de l'effet de structure par âge et calcul du taux de fécondité totale (taux comparatif)





/			
	Population		
	tyne		

				Population					
				type			Population		Nombre de
			Taux de	(immortelle)		Nombre de	féminine de	Nombre de	naissances de
		Nombre de	fécondité	au début de	Population	naissances	table de	naissances	filles
Intervalle	Nombre de	femmes	par âge (tfsa)	l'intervalle	immortelle	(population	mortalité	(population	(population
d'âge	naissances	(exposées)	pour 1000	d'âge	exposée	immortelle)	(So=10 000)	de table)	de table)
15-19	12 501	1 924 553	6.50	1 000	5 000	32.5	49 757	323.2	157.7
20-24	84 402	1 787 600	47.22	1 000	5 000	236.1	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	222 883	1 906 032	116.94	1 000	5 000	584.7	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	247 604	2 011 783	123.08	1 000	5 000	615.4	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	130 801	2 072 822	63.10	1 000	5 000	315.5	49 486	3 122.7	1 523.3
40-44	29 870	2 080 585	14.36	1 000	5 000	71.8	49 318	708.0	345.4
45-49	1 960	2 210 607	0.89	1 000	5 000	4.4	49 039	43.5	21.2
total	730 021	13 993 982			35000	1 860.3		18 455.3	9 002.6

Population type

Puisque
$$TFG = \sum_{x=15}^{45} {}_{n} f_{x} \cdot \frac{{}_{n} P_{x}}{\sum_{x=15}^{45} {}_{n} \overline{W}_{x}};$$

Puisque $TFG = \sum_{x=15}^{45} {}_{n}f_{x} \cdot \frac{{}_{n}P_{x}}{\sum_{i=1}^{45} {}_{n}\overline{W}_{x}}$; On choisir comme standard une population imaginaire des générations de 1000 femmes immortelles qui sont exposées à la fécondité

Pour cette population TFG ajusté à l'âge =
$$TFG(AA) = \frac{1}{35000} \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_{n} f_{x} \cdot 5000 = \frac{1}{35} \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_{n} f_{x} \cdot 5$$

Et le *nombre total réduit d'enfant*s dans cette ou la fécondité totale réduite = $FTR = \sum_{n=1}^{45} f_x \cdot 5 = 5 \cdot \sum_{n=1}^{45} f_x$

C'un indicateur de la fécondité nette qu'on appelle :

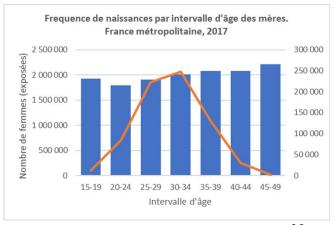
la fécondité totale / la taux de fécondité totale / la somme des naissances réduites / l'indice conjoncturelle de $TFT = n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f_x$ la fécondité totale / la taux de fécondité totale / fécondité / l'indice synthétique de fécondité

$$TFT = n \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_{n} f_{x}$$

Il a une métrique très convenable pour l'interprétation:

nombre de naissance par femme

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : prise en compte de la mortalité et calculs du taux de reproduction nette



				Population					
				type			Population		Nombre de
			Taux de	(immortelle)		Nombre de	féminine de	Nombre de	naissances de
		Nombre de	fécondité	au début de	Population	naissances	table de	naissances	filles
Intervalle	Nombre de	femmes	par âge (tfsa)	l'intervalle	immortelle	(population	mortalité	(population	(population
d'âge	naissances	(exposées)	pour 1000	d'âge	exposée	immortelle)	(So=10000)	de table)	de table)
15-19	12 501	1 924 553	6.50	1 000	5000	32.5	49 757	323.2	157.7
20-24	84 402	1 787 600	47.22	1 000	5000	236.1	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	222 883	1 906 032	116.94	1 000	5000	584.7	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	247 604	2 011 783	123.08	1 000	5000	615.4	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	130 801	2 072 822	63.10	1 000	5000	315.5	49 486	3 122.7	1 523.3
40-44	29 870	2 080 585	14.36	1 000	5000	71.8	49 318	708.0	345.4
45-49	1 960	2 210 607	0.89	1 000	5000	4.4	49 039	43.5	21.2
total	730 021	13 993 982			35000	1 860.3		18 455.3	9 002.6

Taux de fécondité générale $TFG = \frac{N}{\sqrt[3]{W_{1s} \cdot t}}$ Taux de fécondité totale $TFT = n \cdot \sum_{x=1.5}^{4.5} {}_{n}f_{x}$ Taux de fécondité par âge $f_{x} = \frac{{}_{n}N_{x}}{\sqrt[3]{W_{1s} \cdot t}};$

Dans une population immortelle le ratio de reproduction des générations équivaut le taux de croissance qui dépend de la fécondité totale et

de la proportion des filles (la reproduction sexuée). Chez les humains le rapport normal de sexes à la naissance est 105 garçons pour 100 filles, donc la proportion de fille δ = 100/(100+105)=0,488, et on calcule le taux brut de reproduction: $TBR = \delta \cdot TFT = \delta \cdot n \cdot \sum_{n=1}^{45} f_x$

Dans une population soumise à la mortalité par âge le ratio (le taux) de reproduction dépend de la survie des femmes de la naissance à la fin de l'âge fécond et les années d'exposition à la fécondité correspondent à la population d'une table de mortalité calculée pour cette

population $_{n}L_{x}$, on peut donc calculer

le taux net de reproduction:
$$TNR = \frac{\delta \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_{n} f_{x} \cdot {}_{n} L_{x}}{S_{0}}$$

Nota: on peut utiliser les taux de naissances féminines par âge, si ces données sont disponibles

Analyse de la fécondité par âge : répartition, densité, tendance centrale et dispersion

Naissances, population féminine et les taux de fécondité par âge.

			Nombre de	Taux centré de fécondité	Centre	Présentation conventionnelle des
Intervalle	Ampli-	Nombre de	femmes	par âge pour	d'intervalle	intervalle d'âge
d'âge	tude	naissances	(exposées)	1000	d'âge	révolu
x, x + n	n_x	$_{n}N_{x}$	$_{n}\boldsymbol{W}_{x}$	$_{n}\boldsymbol{f}_{x}$	$\overline{oldsymbol{y}}_{x}$	y_x
15-20	5	12 501	1 924 553	6,50	17,5	15-19
20-25	5	84 402	1 787 600	47,22	22,5	20-24
25-30	5	222 883	1 906 032	116,94	27,5	25-29
30-35	5	247 604	2 011 783	123,08	32,5	30-34
35-40	5	130 801	2 072 822	63,10	37,5	35-39
40-45	5	29 870	2 080 585	14,36	42,5	40-44
45-50	5	1 960	2 210 607	0,89	47,5	45-49
total		730 021	13 993 982	XXX	xxx	

Données pour cet exemple: France métro, 2017

Particularités à noter:

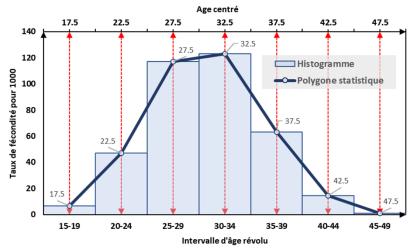
- · L'âge révolu est catégorisé: les intervalles d'âge annuels ou pluriannuels (quinquennaux)
- Les taux sont *centrés* représentant une valeur movenne sur l'intervalle, applicable à tous les âges (révolus) à l'intérieure de chaque intervalle [x, x+n]
- Les taux sont naturellement ordonnés et repartis en fonction de l'âge (à chaque âge correspond un taux)

Les taux par âge
$$_{n}f_{x}=\frac{_{n}N_{x}}{_{n}W_{x}\cdot t};$$

représentent donc une série (de répartition) d'une variable quantitative qui peut être chartérisée par des paramètres de :

- a) sa tendance centrale (movenne, médian, mode)
- b) sa dispersion (écart-type),
- c) sa forme (aplatissement, dysmétrie)
- d) sa grandeur intégrale

Pour les taux de type 'âge x période' et 'âge x génération'



On peut par ailleurs calculer le mode et la médiane, mais il suffit d'indique l'intervalle d'âge

b) écart type d'âge de la fécondité :

a) l'âge moyen de la fécondité :
$$\overline{x} = \frac{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} \left[(x + \frac{n_x}{2}) \cdot {}_n f_x \right]}{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} {}_n f_x}$$
 si n_x sont les mêmes $\overline{x} = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{x=50} x_n f_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} n_x f_x}$

$$S_{x} = \sqrt[2]{\frac{\sum_{x=15}^{x=50-n} \left[\overline{x} - (x + \frac{n}{2}) \right]^{2} \cdot {}_{n} f_{x}}{\sum_{x=15}^{x=50-n} {}_{n} f_{x}}}$$
 ou bien : $S_{x} = \sqrt[2]{\overline{x^{2}} - \overline{x}^{2}}$ (formule de König

Pour les taux de type 'génération x période' (âge atteint) formules deviennent : \bar{x} =

c) les indicateurs de la forme se calculent de même façon (voir le cours d'analyse statistique), mais dans la pratique courante ces indicateurs n'apparaissent que rarement voire jamais (à tort)

Habituellement un graphique de type histogramme ou polygone suffit pour juger la forme de la répartition de la densité fécondité par âge (cf. graphique à gauche)

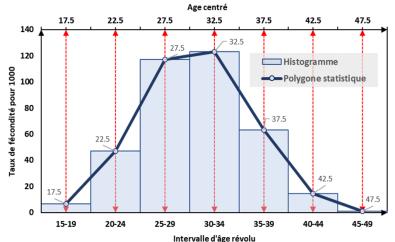
Analyse de la fécondité par âge : niveau intégral et niveau moyen

Naissances, population féminine et les taux de fécondité par âge.

				Taux centré		Présentation
			Nombre de	de fécondité	Centre	conventionnelle des
Intervalle	Ampli-	Nombre de	femmes	par âge pour	d'intervalle	intervalle d'âge
d'âge	tude	naissances	(exposées)	1000	d'âge	révolu
x, x + n	n_x	$_{n}N_{x}$	$_{n}\boldsymbol{W}_{x}$	$_{n}\boldsymbol{f}_{x}$	\overline{y}_x	y_x
15-20	5	12 501	1 924 553	6,50	17,5	15-19
20-25	5	84 402	1 787 600	47,22	22,5	20-24
25-30	5	222 883	1 906 032	116,94	27,5	25-29
30-35	5	247 604	2 011 783	123,08	32,5	30-34
35-40	5	130 801	2 072 822	63,10	37,5	35-39
40-45	5	29 870	2 080 585	14,36	42,5	40-44
45-50	5	1 960	2 210 607	0,89	47,5	45-49
total		730 021	13 993 982	XXX	XXX	

Données pour cet exemple: France métro, 2017

Présentation (visualisation) des taux de fécondité par âge



Particularités à noter:

- L'âge révolu est catégorisé: les intervalles d'âge annuels ou pluriannuels (quinquennaux)
- Les taux sont *centrés* représentant une valeur moyenne sur l'intervalle, applicable à tous les âges (révolus) à l'intérieure de chaque intervalle [x, x+n]
- Les taux sont naturellement ordonnés et repartis en fonction de l'âge (à chaque âge correspond un taux)

Les taux par âge
$$_{n}f_{x} = \frac{_{n}N_{x}}{_{n}W_{x} \cdot t};$$

représentent donc une série (de répartition) d'une variable quantitative qui peut être chartérisée par des paramètres de :

- a) sa tendance centrale (moyenne, médian, mode)
- b) sa dispersion (écart-type),
- c) sa forme (aplatissement, dysmétrie)
- d) sa grandeur intégrale
- d) la grandeur se mesure par rapport à la surface de l'histogramme représentant la répartition de la densité des taux par âge (la densité des naissances réduites) elle dépend donc de la hauteur des rectangle (taux) et des amplitude des intervalles

$${}_{5}f_{15} = \frac{\sum_{x=15}^{50-n_{45}} n_{x} \cdot {}_{n}f_{x}}{\sum_{50-n_{45}}^{50-n_{45}} n_{x}}$$

soit avec une moyenne arithmétique des taux par âge : $\sum_{x=1.5}^{50-n_{45}} n_x \cdot {}_{n} f_x$ Si les « n » sont égaux, il suffit de diviser la somme des taux par le nombre d'intervalle d'âge

On voit dans cette formule que 35f 15 correspond au taux de fécondité générale ajusté à l'âge (TFGaa)

<u>soit</u> avec un intégral ou le total des surface de tous les rectangles ou la **Fécondité Totale** : $FT = \sum_{i=1}^{50-n_{45}} n_x \cdot {}_n f_x$

Cet indicateur est communément désigné comme Indicateur conjoncturel de fécondité (cf. INSEE), synonymes en français : Indice Synthétique de Fécondité ou la Somme des Naissances Réduites (INED) Sinon Taux de Fécondité Totale (Caselli, Valin, Wunch, 2001, DAS, vol.1, p.286)

Ces deux indicateurs sont isomorphes : $FT = 35 \cdot {}_{35} f_{15}$

$$FT = 35 \cdot {}_{35}f_{15}$$

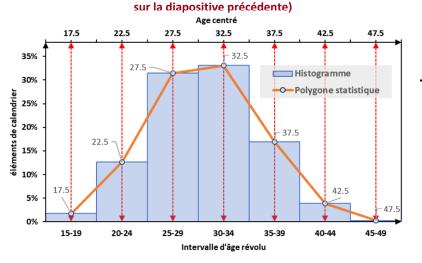
Analyse de la fécondité par âge: niveau (quantum) et calendrier (tempo) de la fécondité

Naissances, population féminine et les taux de fécondité par âge.

			Nombre de	Taux centré de	Centre	Taux de
Intervalle	Ampli-	Nombre de	femmes	fécondité par	d'intervalle	fécondité
d'âge	tude	naissances	(exposées)	âge pour 1000	d'âge	réduits (%)
x, x + n	n_x	$_{n}N_{x}$	$_{n}\boldsymbol{W}_{x}$	$_{n}\boldsymbol{f}_{x}$	$\overline{\mathbf{y}}_{x}$	φ_x
15-20	5	12 501	1 924 553	6,50	17,5	1,7%
20-25	5	84 402	1 787 600	47,22	22,5	12,7%
25-30	5	222 883	1 906 032	116,94	27,5	31,4%
30-35	5	247 604	2 011 783	123,08	32,5	33,1%
35-40	5	130 801	2 072 822	63,10	37,5	17,0%
40-45	5	29 870	2 080 585	14,36	42,5	3,9%
45-50	5	1 960	2 210 607	0,89	47,5	0,2%
total		730 021	13 993 982	xxx	XXX	100,0%

Données pour cet exemple: France métro, 2017

Présentation (visualisation) des éléments de calendrier (l'échelle de l'âge de gauche est seule différence avec le graphique



a) l'âge moyen de la fécondité : $\overline{x} = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} x_n f_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} n f_x}$ b) écart type de l'âge de la fécondité : $s_x = \sqrt{\frac{\sum_{x=15}^{x=50-n} \left[\overline{x} - (x + \frac{n}{2})\right]^2 \cdot n f_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n} f_x}}$

ces paramètres 'a)' et 'b)' sont normalisés, (réduits à la somme des taux) ils sont donc indépendants de la grandeur des taux

Soit

 $_{n}\varphi_{x} = \frac{_{n}f_{x}}{\sum_{x} _{n}f_{x}}$ les taux de fécondité normalisés (réduits à leur somme sur l'intervalle de 15 à 50 ans), \rightarrow $\rightarrow \sum_{x} _{n}\varphi_{x} = 1 \text{ et avec cette écriture l'âge moyen de la fécondité} : \overline{x} = \frac{n}{2} + \sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} x_{n}\varphi_{x}$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_{x} = 1$$
 et avec cette écriture l'âge moyen de la fécondité : $\overline{x} = \frac{n}{2} + \sum_{x=15}^{\infty} x_{n} \varphi_{x}$

la densité de la fécondité par âge réduite est

- identique à la densité de la fécondité par âge,
- indépendant du niveau de la fécondité totale
- ightarrow on considère ${}_n arphi_x$ comme les éléments du calendrier de la fécondité ou le 'tempo' de fécondité
- c) la fécondité totale $TFT = n \cdot \sum_{i=1}^{50-n_{45}} f_x$ à son tours ne dépend pas de la structure des taux par âge ou du calendrier de la fécondité (1+2 ≡ 2+1) par conséquent: on considère le TFT comme le niveau ou 'quantum' de la fécondité

Analyse transversale de la fécondité par rang de naissance :

Soit $_{n}W_{x}$ – effectif des femmes d'âge entre x et x+n indépendamment de leur descendance

 $_{n}N_{x}$ – naissances de rang (de parité) i chez les femmes d'âge entre x et x+n

 $_{n}f_{x}^{i} = \frac{_{n}N_{x}^{i}}{_{n}W_{x}}$ – le taux de fécondité de rang *i* par âge des mères

NB: on utilise les taux de deuxième catégorie aui sont additifs: avec dénominateur commun

$$TFT^{i} = n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\omega - n} {}_{n} f_{x}^{i}$$

 $TFT^i = n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\omega-n} f_x^i$ - indice synthétique de fécondité de rang i (interprété comme un nombre moyen d'enfants de rang i nés vivants par une femme dans une génération fictive)

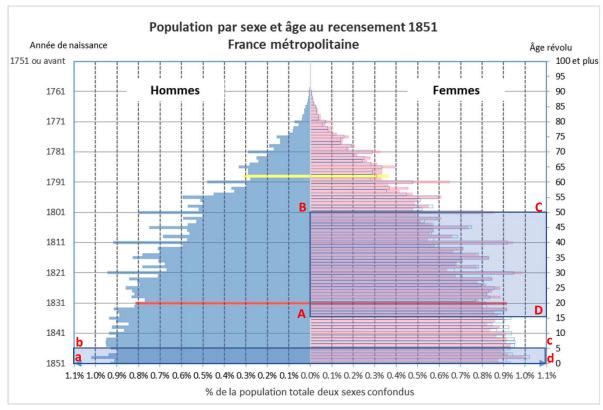
Puisqu'on utilise dans ces calculs les taux de deuxième catégorie les TFT se résument par addition en le TFT général (tous rangs confondus) :

$$TFT = \sum_{k=1}^{m} TFT^{i} = n \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{x=\alpha}^{\omega - n} {}_{n} f_{x}^{i}$$

Pour chaque rang de naissance on peut calculer l'âge moyen à la maternité (de rang i):

$$AMM^{i} = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{49-n} x \cdot {}_{n} f_{x}^{i}}{\sum_{x=15}^{49} {}_{n} f_{x}^{i}} = \frac{n}{2} + n \cdot \frac{\sum_{x=15}^{49-n} x \cdot {}_{n} f_{x}^{i}}{TFT^{i}}$$

Estimations indirectes des indicateurs de la fécondité à partir des données d'un Recensement général de population ou d'une enquête sur échantillon



On peut estimer la fécondité totale (taux de fécondité totale / indice synthétique) sans prise en considération de la mortalité des enfants < 5 ans

Pour la France en 1851:
$$FT = \frac{35 \cdot _{35} \hat{f}_{15}}{1000} = \frac{35 \cdot 78,5}{1000} = 2,75$$

$$FT = \frac{35 \cdot {}_{35} \hat{f}_{15}}{1000} = \frac{35 \cdot 78, 5}{1000} = 2,75$$

Estimation du TGF $\binom{35}{15}$ moyen pour 5 ans qui précédent le RGP ou une enquête :

Le rectangle abcd représentant le nombre d'enfants âgés 0-4 ans révolus P(0-4) à la date de la collecte des données et le rectangle ABCD l'effectif de femmes âgées de 15 à 50 ans W(15-49)

le ratio enfants/mères (REM) = Nombre d'enfant 0-4 ans Nombre de femmes 15-49

Soit B le nombre de naissance moyen annuel durant 5 ans proportionnel à l'effectif de la population 0-4 ans dans la mesure de la table de mortalité du moment :

$$\frac{B}{P(0-4)} \approx \frac{l_0}{{}_5L_0} \to B = \frac{P(0-4) \cdot l_0}{{}_5L_0}$$

$$_{35}\hat{f}_{15} = \frac{l_0 \cdot P(0-4)}{_5 L_0 \cdot W(15-49)} = REM \cdot \frac{l_0}{_5 L_0}$$

Pour la France en 1851 $_5L_0 \approx 4265$ avec $S_0 = 1000$ * et

$$REM = \frac{3321819}{9355995} = 0.355$$

Taux de fécondité générale $_{35}\hat{f}_{15} = \left(0,355 \cdot \frac{1000}{4265}\right) \cdot 1000 = 78,5\%$

$$ISF \approx {}_{35}\hat{f}_{15} \cdot 35 = 2,75$$

^{*} cf. JN Bonneuil «Table de mortalité France et par département et tables de migration nette par département, 1806-1906, INED https://table-mortalite-bonneuil.site.ined.fr/

La quantification de la fécondité dans la dimension longitudinale (générationnelle): de la réalité à une artifice

Soit

x – début de d'un intervalle d'âge;

n – amplitude d'intervalle d'âge

 $W_{\rm v}$ – effectif d'une génération féminine à l'âge x (exacte);

 $_{n}N_{x}$ – nombre de naissances produites par les femmes sur l'intervalle d'âge entre x et x+n;

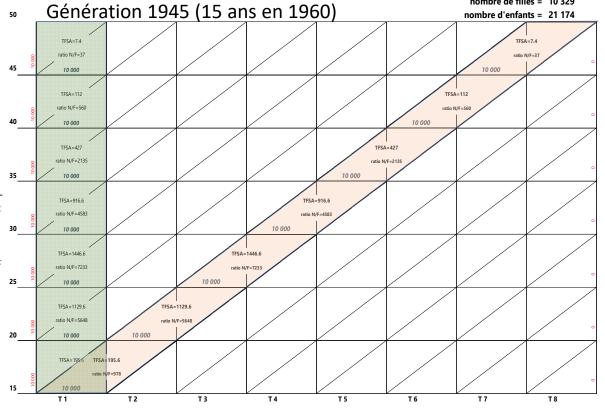
Il n'y pas de migration, ni mortalité on pourrait donc calculer avec le respect des règles mathématiques et la nature des données

les taux de fécondité spécifique à l'âge (TFSA) : ${}_{n}f_{x} = \frac{{}_{n}N_{x}}{0.5 \cdot (W_{x} + W_{x+n}) \cdot n}$

les quotients de fécondité spécifique à l'âge ou ratios de naissances aux femmes à l'âge exacte \mathbf{x} (ratio N/F) : ${}^{n}F_{x} = \frac{{}^{n}N_{x}}{W_{x}} \equiv n \cdot {}_{n}f_{x}$

la descendance finale ou le nombre moyen d'enfants par femme à l'âge de 50 ans avec 3 approches et 3 formules équivalentes :

$$DF = \frac{\sum_{x=15}^{50-n} {}_{n}N_{x}}{W_{50}} \quad (1) \qquad DF = \sum_{x=15}^{50-n} {}_{n}F_{x} \quad (2) \qquad DF = n \cdot \sum_{x=15}^{50-n} {}_{n}f_{x} \quad (3)$$



Si la mortalité (et migration) intervient dans notre population, les trois formules pour la descendance finale (DF) ne sont plus équivalentes:

- la formule (1) surestime la fécondité finale puisque le dénominateur est réduit à cause de la mortalité par rapport à l'effectif de la population procréatrice (exposée);
- la formule (2) viole les règles mathématique d'addition des quotients (dénominateur n'est plus commun)
- la formule (3) reste conforme à la mathématique, mais elle transforme la génération réelle en génération longitudinale hypothétique, on passe donc de l'analyse d'un objet réel à un artifice d'une fonction des taux de fécondité (f_x) avec les âges catégorisés et ordonnés ou f(x) si l'âge est continu....

13

La présentation et la quantification de la fécondité dans la dimensions transversale (conjoncturelle)

Soit

x – début de d'un intervalle d'âge;

n – amplitude d'intervalle d'âge

 W_{x} – effectif d'une génération féminine à l'âge x (exacte) ;

 $_nN_x$ – nombre de naissances produites par les femmes sur l'intervalle d'âge entre x et x+n ;

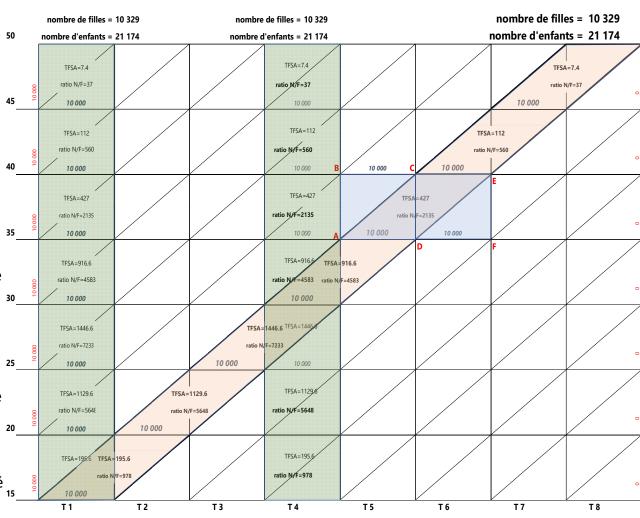
En admettant l'hypothèse de la stationnarité, on reconnaît identique :

- le nombre et la répartition des événements situés dans les carrés ABCD, DCEF et dans le losange ACED
- la structure par âge et le niveau de la fécondité de la génération
 T1 (diagonale) et de la population féminine multigénérationnelle
 T4 (colonne)

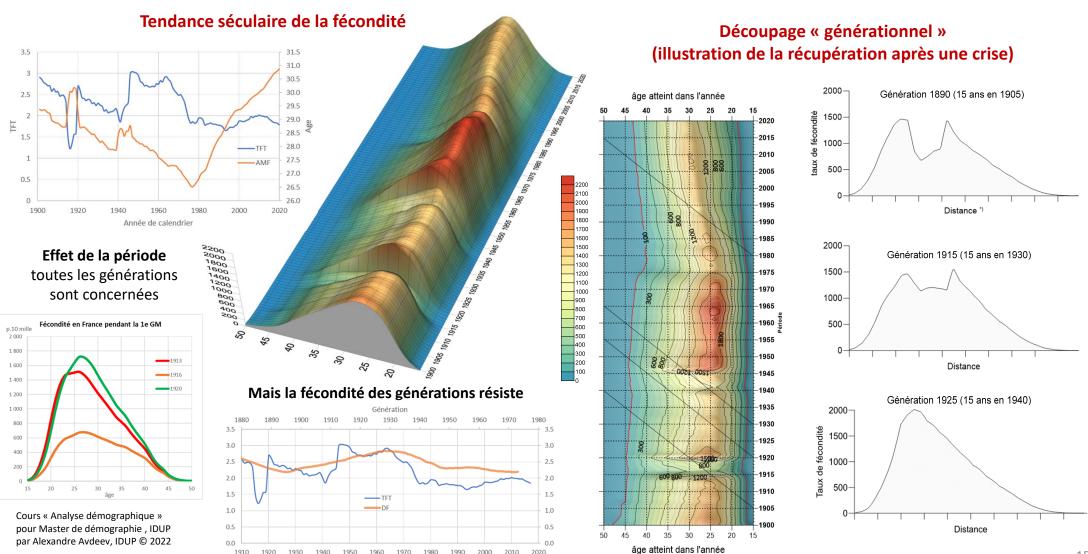
Cette hypothèse (stationnarité) est utile puisqu'elle permet de faire les prévisions pour le nombre de naissances surtout à court terme. Toutefois, elle ne donne aucune raison pour interpréter la dynamiques de la fécondité totale (transversale) de même sorte que

la dynamique de la descendance finale.

<u>L'hypothèse de stationnarité, par la définition, suppose qu'il n'y a aucune dynamique</u> (ou qu'elle est très faible), mais si la dynamique existe il se peut que les changements dans le calendrier de fécondité des générations (tempo) sans changement du niveau (quantum) provoquent la variation de la fécondité totale (transversale)



Analyse visuelle de l'évolution séculaire de la fécondité en France à partir des taux par âge



Année de calendrier

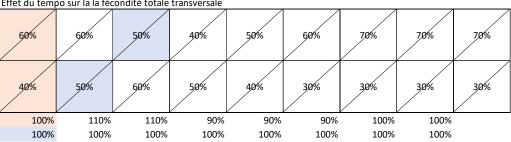
Pli de Ryder où l'effet de la 'translation' ou de l'interférence entre le tempo (changement du calendrier) et le quantum (le niveau) de la fécondité

Effet du tempo sur la la fécondité totale transversale

Contribution des âges plus élevés à la fécondité totale >

Contribution des âges jeunes à la fécondité totale >

fécondité totale transversale fécondité totale longitudiale



 A la fin de la transition démographique la fécondité des générations devient plus jeune à cause de la disparition des naissances des rangs élevés: dans cet exemple on voit le passage du rapport 40/60 à d'abord 50/50 et ensuite à 60/40

• TFT transversal > TFT longitudinal

• TFT transversal augmente

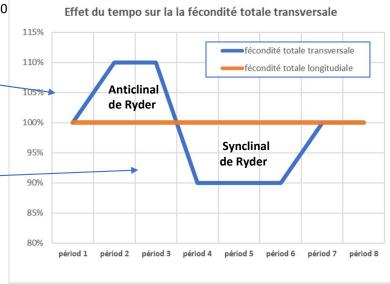
conjoncturel

Anticlinal de Ryder

- toutefois l'âge moyen à la primo-fécondité ne bouge pas trop...
- si la fécondité des générations (longitudinale) diminue, cela n'est pas affiché par la dynamique des indicateurs transversaux

Synclinal de Ryder

- La fécondité des générations (longitudinale) recule à cause de la "gender transition" où la seconde transition démographique (?)
 - TFT transversale < TFT longitudinale
 - TFT transversale TFR diminue habituellement
 - si la fécondité des générations diminue, cela est accompagnée par la diminution exagérée de la indicateur
 - inversement, l'augmentation de la fécondité des générations n'est pas affichée (cachée) par la dynamique de l'indicateur conjoncturel



D:\Documents\At_use\Dossier2020\Oxford\Calculs\Tempo-effect.xlsx

Une solution pour la quantification de l'effet de translation voir l'EPI, cours régulier, thème 8, diapo 18-24

Démonstrations mathématiques sont présentées en détails dans :

Ryder, N. (1964) – "The process of demographic translation". *Demography*, 1964, Vol. 1 no.1, p. 74-82
Bongaarts, J. and G. Feeney (1998) – "On the quantum and tempo of fertility". *Population and Development Review*, 1998, vol. 24 no 2, p. 271-291

Analyse de la fécondité par rang de naissances :

probabilité d'agrandissement de la famille (PAF)

La probabilité d'agrandissement des familles (PAF)

Soit a_i la probabilité qu'une femme ayant i enfants donne la naissance à un autre enfant

$a_0 = \frac{DF(1)}{1} = DF(1);$

$$a_1 = \frac{DF(2)}{DF(1)};$$

$$a_2 = \frac{DF(3)}{DF(2)};$$

••••

$$a_k = \frac{DF(k+1)}{DF(k)}$$

Ainsi

 $a_0 \equiv$ (proportion des femmes ayant des enfants ou la descendance finale de *rang 1*) \equiv <u>probabilité</u> d'avoir au moins un enfant.

Donc a_k est la probabilité d'agrandissement des familles de parité k

La signification exacte de la probabilité d'agrandissement des familles (a_k) est suivante : c'est la proportion des femmes qui ont k+1 enfants parmi celles qui ont k enfants, \rightarrow ou c'est la fréquence de passage de la parité k à la parité k+1

La proportion des femmes sans enfants p_0 est égale à $p_0 = 1 - DF(1)$ et $DF(1) = 1 - p_0$

Respectivement, soit p_1 proportion des femmes ayant un enfant unique, alors \rightarrow

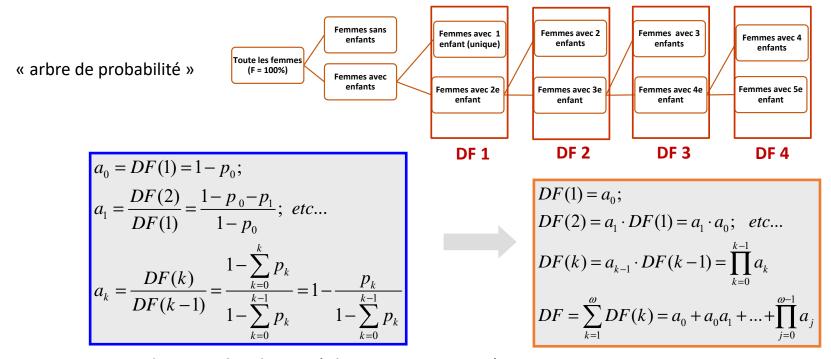
$$p_1 = DF(1) - DF(2)$$
 et $DF(2) = DF(1) - p_1$ ou $DF(2) = 1 - p_0 - p_1$

$$p_2 = DF(2) - DF(3)$$
 et $DF(3) = DF(2) - p_2$

ou
$$DF(3) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$$

La probabilité d'agrandissement des familles (suite)

On peut décrire la probabilité d'agrandissement des familles avec une expression contenant p_{ν} (proportion des femmes avec un enfant de parité **k**) :



Pour l'intervalle fermé-ouvert (décomposition de la DF_{n+}):

1° Hypothèse de la probabilité constante (progression géométrique) $a_{n+} = 1 - \frac{DF_{n-1}}{DF_{n+}}$; avec $n+=\{n, n+1, n+2 \text{ etc.}\}$, et $DF_{n+} = DF - \sum_{n=1}^{n-1} DF_n$

2° Hypothèse sur la distribution binomiale des femmes avec n enfants et plus (la solution un peu plus difficile)

19

La probabilité d'agrandissement de la famille (illustration)

