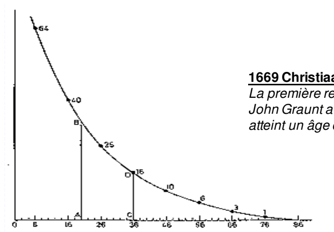
Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie

Cours d'analyse démographique par Alexandre Avdeev, niveau : **Master 1e année et Diplôme générale de démographie**

Chapitre 5 : Analyse de durée : tables démographiques, tables de mortalité

1. Evénements et états démographiques
2. Eléments clés des tables démographiques.
3. Durée de vie, durée d'un état
4. Comparaison des tables : décomposition des changements de l'espérances de vie



1669 Christiaan Huygens (1629-1695), Netherlands
La première représentation graphique de la fonction de distribution continue: la table de mortalité de John Graunt avec la démonstration comment peut-on trouver la durée médiane de vie après avoir atteint un âge donné

Considérations sur les événements et les états en démographie

Cas général : **état A** → **événement Z** → **état B**

Transition de l'état A vers l'état B conditionnée par un événement Z

Tables démographiques présentent la probabilité de passer d'un état à l'autre sous la condition d'un événement (le plus souvent c'est l'âge ou la durée de l'état initial).

Exemple: mortalité

état A : *« vivant à l'âge X ans révolu »*	**événement Z :** *« décès à l'âge x ans révolus »* →	**état B :** *« mort à l'âge X ans révolu »*

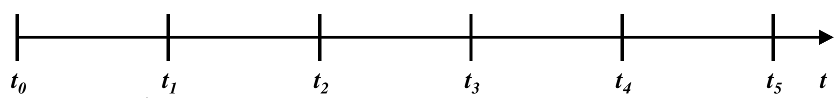
X = 0; 1; 2; …; ω

A est ***un état transitoire*** puisque l'individu peut passer de cet état à un autre état	***Z*** est ***un événement fatal*** : puisque « tous sont mortels », mais c'est ***un événement possible*** pour l'âge X et aussi, comme on ne peut pas mourir deux fois, c'est un ***événement non renouvelable***.	***B*** est ***un événement absorbant***: puisque l'individu ne peut pas passer de cet état à un autre état

On peut donc s'intéresser à obtenir la série des probabilités de mourir à chaque âge « q_x », telle que $\sum_{x=0}^{\omega} q_x = 1$

Donc « q_x » est *une variable clé* de la table de mortalité.

Mesures de transitions (mortalité) dans des intervalles de temps



$P_0 = 100$, $D_{0,1} = 4$: $\bar{P}_{0,1} = 0{,}5 \times (100+96) = 98; \quad m_{0,1} = \frac{4}{98}(100\%) = 4{,}08; \quad q_{0,1} = \frac{4}{100} = 0{,}04$

$P_1 = 96$, $D_{1,2} = 4$: $\bar{P}_{1,2} = 94; \quad m_{1,2} = 4{,}255\%; \quad q_{1,2} = 4{,}176\%$

$P_2 = 92$, $D_{2,3} = 4$: $\bar{P}_{2,3} = 90; \; m_{2,3} = 4{,}444\%; \; q_{2,3} = 4{,}348\%$

$P_3 = 88$, $D_{3,4} = 4$: 86; 4,65%; 4,55%

$P_4 = 84$, $D_{4,5} = 4$: 82; 4,88%; 4,76%

$P_5 = 80$

$$\bar{P}_{t_0,t_5} = \frac{100+80}{2} = 90$$

$$NAV_{t_0,t_5} = \frac{100+80}{2} \times 5 = 450$$

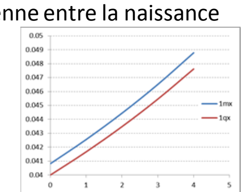
$$m_{t_0,t_5} = \frac{20}{90 \times 5} \cdot (100\%) = 4{,}44\%$$

$$_5q_{t_0,t_5} = \frac{20}{100} = 0{,}2 \qquad _1q_{t_0,t_5} = \frac{0{,}2}{5} = 0{,}04$$

Résumé des transitions sous la forme d'un tableau:

Age exact	Survivants à l'âge exact t	Décès dans l'intervalle d'âge [t;t+1)	Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge [t;t+1)	Taux de mortalité dans l'intervalle d'âge [t;t+1)	Probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge [t;t+1)	Probabilité de survivre dans l'intervalle d'âge [t;t+1)
t	S_t	$D_{t,t+1}$	$L_{t,t+1}$	$m_{t,t+1}$	$q_{t,t+1}$	$p_{t,t+1}$
0	100	4	98	0,0408	0,0400	0,9600
1	96	4	94	0,0426	0,0417	0,9583
2	92	4	90	0,0444	0,0435	0,9565
3	88	4	86	0,0465	0,0455	0,9545
4	84	4	82	0,0488	0,0476	0,9524
5	80	4				

Question : quelle est la durée de l'état « vivant » (durée de vie) moyenne entre la naissance (âge exact 0) et le 5e anniversaire (âge exact de 5 ans)?



Réponse : $${}_5e_0 = \frac{\sum_{t=0}^{4} {}_5L_t}{S_0}$$ une espérance mathématique de la durée de vie (espérance de vie moyenne)

Eléments d'une table démographique à l'extinction (décrément) simple

Table de mortalité est un modèle d'une population (génération) :
dans laquelle le nombre de naissance est égal à 1; et la somme de décès est égale au nombre de naissance.

x – âge exact (au moment du x^{ème} anniversaire);

n – amplitude des intervalles d'âge pour lesquels on calcule les probabilités (« pas » de table), p.ex. si ***n=1,4,5,5,….,*** alors ***x=0, 1, 5, 10, 15, …, 55,… 100*** etc.) : dans la table de mortalité on considère les intervalles entre x (compris) et x+n (exclu)

S_x – nombre de survivants jusqu'à l'âge exact x ($x^{ème}$ anniversaire) ≡ [$l(x)$ ou l_x](« les survivants »);

${}_nq_x$ – probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** [$q(x,x+n)$ ou $q_{x,x+n}$] ou le quotient de mortalité ;

${}_np_x$ – probabilité de survivre (ne pas mourir) de l'âge ***x*** à l'âge ***x+n*** [$p(x,x+n)$ ou $p_{x,x+n}$] ;

${}_nL_x$ – « population de table » ou le nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** [$L(x,x+n)$ ou $L_{x,x+n}$] (« la population moyenne » x ***n***) ;

${}_nd_x$ – nombré de décès dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** [$d(x,x+n)$ ou $d_{x,x+n}$] (« décès de table ») ou la probabilité pour un nouveau-né de décéder dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** ;

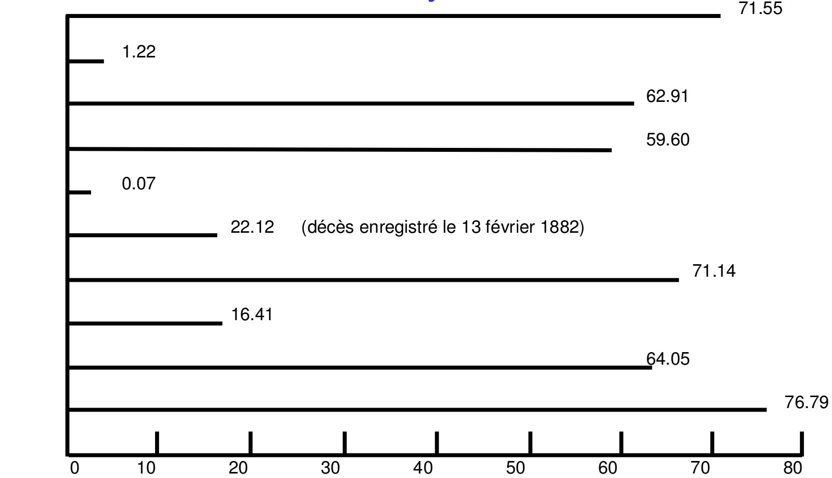
${}_nm_x$ – taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre ***x*** et ***x+n*** [$m(x,x+n)$ ou $m_{x,x+n}$] ou le taux de mortalité de table ;

T_x – nombre d'années vécues après l'âge exact x ($x^{ème}$ anniversaire) ;

e_x – espérance de vie (durée moyenne de vie) après l'âge exact x ($x^{ème}$ anniversaire) [e_0- espérance de vie à la naissance] ;

${}_na_x$ – durée de vie moyenne sur l'intervalle d'âge [x, x+n) des individus décédés dans cet intervalle.

Age au décès et les lignes de vie de 10 personnes nées le 1 janvier 1800[1)]



Comment construire une table de mortalité à partir des données individuelles ? Faites cet exercice !

1) Source: S. Preston et al. (2001), p. 39

Présentation des données individuelles sous la forme d'une table de mortalité

Age exact	Nombre de survivants à l'âge x	Nombre de décès entre x et x+n	Probabilité de mourir entre x et x+n	Probabilité de survivre de l'âge x à x+n	Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge	Nombre d'années vécues après l'âge x	Espérance de vie à l'âge x	Taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre x et x+n	Nombre d'années vécues par les décédés entre x et x+n
x	S_x	$_nd_x$	$_nq_x$	$_np_x$	$_nL_x$	$T_x=\sum {_nL_x}$	$e_x=T_x/S_x$	$_nm_x$	$_na_x$
0	10	1	1/10	9/10	9+0.07= =9.07	436.79+9.07== 445.86	445.86 : 10= =44.586	1/9.07	0.7
1	9	1	1/9	8/9	8 x 4 +0.22= =32.22	404.57+32.22= =436.79	436.79 : 9 = =43.679	1/32.22	0.22
5	8	0	0	1	8 x 5 = 40	364.57+40= =404.57	404.57 : 8= =50.571	0	----
10	8	1	1/8	7/8	7 x 10+6.41= =76.41	288.16+76.41= =364.57	364.57 : 8 = =45.571	1/76.41	6.41
20	à continuer	1							
30		0							
40									
50									

Structure d'une table démographique (probabilité de sortir)

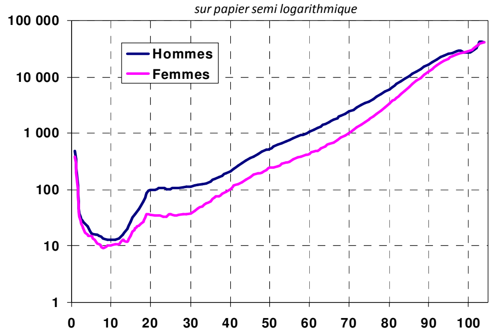
Table de mortalité (n=1)

Soit $_1p_x$ – la probabilité de survivre (de n'est pas mourir) entre les ages exacts ***x*** et ***x+1*** est le complémentaire de la probabilité de mourir (quotient de mortalité $_1q_x$) dans cet intervalle :

$$_np_x = 1 - {_nq_x} \Rightarrow {_nq_x} = 1 - {_np_x} \quad (1)$$

Probabilité de mourir par âge et par sexe dans la table de mortalité (France, 2001-2002)

sur papier semi logarithmique



$$S_1 = S_0 \times {_1p_0} \text{ ou}$$
$$S_1 = S_0 \times (1 - {_1q_0}) \quad (2)$$

S_0 = 1 (racine de table) x 10^z

$$q_x = \frac{S_x - S_{x+1}}{S_x} = 1 - \frac{S_{x+1}}{S_x} \quad (3)$$

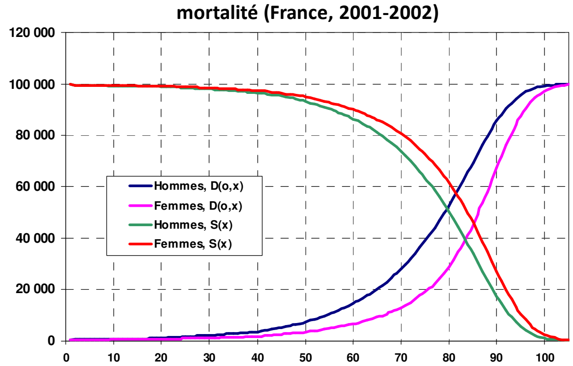
$$p_x = \frac{S_{x+1}}{S_x} \quad (4)$$

Structure d'une table démographique (probabilité de rester)

La racine de table : les tables démographiques peuvent être standardisées si S_0 est réduit à 1, ou 10, 100 etc. Pour rendre visible les valeurs faibles d'une table il est commode de prendre pour sa racine 10 000 ou 100 000.

$$\text{Si } S_0 = 1 \ et \ S_{x+1} = S_x \times {_1p_x} = S_0 \cdot {_1p_0} \cdot {_1p_1} \cdot \ldots \cdot {_1p_x} = S_0 \cdot \prod_x {_1p_x}$$

Probabilité de survivre et mourir par sexe dans la table de mortalité (France, 2001-2002)



$$S_{x+1} = \prod_x {_1p_x}$$

S_x – est ***la probabilité de survivre*** jusqu'à l'âge exact ***X***

$D_x = 1-S_x$ – est ***la probabilité de mourir*** avant l'âge exact ***X***

$$D_x := {_xD_0} = \sum_0^x {_nd_x}$$

où $_nd_x$ – décès de table

Structure d'une table démographique (fréquence de sorties)

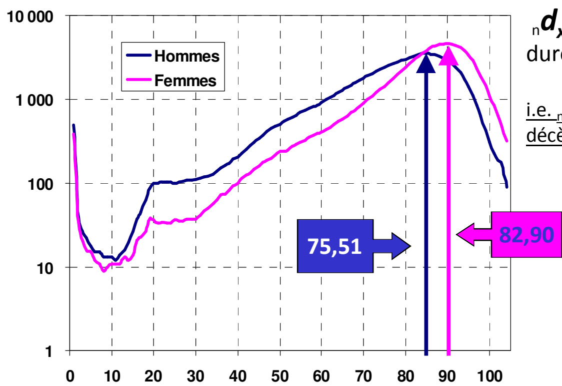
Décès de la table : le nombre de décès dans l'intervalle de l'âge entre x et x+1 est égal à la différence entre S_x et S_{x+1}

$$ {}_1d_x = S_x - S_{x+1} $$

$$ \sum_{x=0}^{\omega} {}_1d_x = (S_0 - S_1) + (S_1 - S_2) + \ldots + (S_{\omega-1} - S_\omega) = S_0 (racine\ de\ table) $$

$$ Comme\ S_0 = 1;\ \therefore \sum_{x=0}^{\omega} {}_1d_x = 1 $$

Décès par âge et par sexe dans la table de mortalité (France, 2001-2002)



${}_n\boldsymbol{d_x}$ c'est une série des fréquence de la durée de vie x+α_x où $0 < \alpha_x \leq n$.

*Dans notre exemple **n=1***

i.e. ${}_nd_x$ = la probabilité pour un nouveau-né de décès dans l'intervalle d'âge entre x et x+n

$$ \bar{e} = \sum_{x=0}^{\omega} (x + {}_1a_x) \cdot {}_1d_x $$

durée moyenne de vie

$$ \exists\ x_\xi \text{ telle que } \sum_{x=0}^{\xi} {}_1d_x = 0{,}5 $$

x_ξ = durée de vie probable

11

L'espérance de vie dans la table démographique

L'espérance de vie = la durée moyenne de l'état initial (l'état au moment t_x)

Hypothèse (très osée):

la distribution de densité de décès à l'intérieur de chaque intervalle d'âge est uniforme. Donc, la moyenne est située juste au milieu d'intervalle.
i.e. *tous les décédés dans l'intervalle d'âge entre x et x+1 ont vécu une demi–année (0,5) en moyenne.*

$$ e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega-1} (x+0{,}5) \cdot {}_1d_x}{\sum_{x=0}^{\omega-1} {}_1d_x} \Rightarrow \quad e_0 = 0{,}5 + \sum_{x=0}^{\omega-1} x \cdot {}_1d_x $$

et comme $d_x = S_x - S_{x+1}$

$$ e_0 = 0{,}5 + \frac{\sum_{x=1}^{\omega} S_x}{S_0} = 0{,}5 + \sum_{x=1}^{\omega} S_x $$

et comme $S_x = {}_1L_x - 0{,}5 \cdot {}_1d_x \Rightarrow$

$$ e_0 = \sum_{x=0}^{\omega-1} {}_1L_x $$

Nota!! **0,5 est disparu**

Cours « Analyse démographique » par Alexandre Avdeev

12

L'espérance de vie dans la table démographique (suite)

e₀ est l'espérance de vie à l'âge 0 (ou au moment initial ***t₀.***

Il est tout à fait possible de calculer l'espérance de vie pour n'importe quel âge « ***a*** »→ ***e***$_a$, ou pour un intervalle ***(a,b)***

$$e_a = \frac{\sum_{x=a}^{\omega-1}(x-a+0{,}5)\cdot{}_1d_x}{\sum_{x=a}^{\omega-1}{}_1d_x}$$

$$e_a = \frac{0{,}5\cdot S_a + \sum_{x=a+1}^{\omega} S_x}{S_a}$$

$$e_a = \frac{\sum_{x=a}^{\omega-1}{}_1L_x}{S_a}$$

$$e_{(a,b)} = \frac{0{,}5\cdot(S_a+S_b)+\sum_{x=a+1}^{b-1}S_x}{S_a}$$

Intervalle terminal (fermé-ouvert)

L'approche général ne convient pas pour l'intervalle terminal. Pour résoudre ce problème on pourrait traiter la population dans cet intervalle d'âge comme une cohorte en sachant que :

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x}$$

Si ***n=∞,*** nous avons : $ {}_\infty m_x = \frac{{}_\infty d_x}{{}_\infty L_x} \rightarrow {}_\infty L_x = \frac{{}_\infty d_x}{{}_\infty m_x}$

Le nombre de décès dans l'intervalle terminal est égal au nombre de survivants à l'âge x (début de l'intervalle terminal), $_\infty d_x = S_x$

$$ {}_\infty L_x = \frac{S_x}{{}_\infty m_x}$$

où $_\infty m_x$ – taux de mortalité observée et
S_x – provient de la table de mortalité

Sinon, sachant que la durée d'attente d'un éventement est inverse à sa probabilité, on peut déduire que $e_{[x,\infty]} = \frac{1}{{}_\infty m_x} \rightarrow {}_\infty L_n = e_{[x,\infty]} \times S_x$

Construction d'une table de mortalité à partir des taux de mortalité : conversion des taux en quotients

Soit m_x* est les taux de mortalité à l'âge « *x* » observés dans une population. Supposons que les taux de mortalité par âge et les taux de mortalité de tables sont à peu près égaux, alors : $_1m_x^* = \frac{_1d_x}{_1L_x}$ (1)

Sachant que $_1L_x = 0{,}5 \cdot (S_x + S_{x+1})$ (2)

on peut réécrire équation (1) → $_1m_x^* = \frac{_1d_x}{0{,}5 \cdot (S_x + S_{x+1})}$ (3)

et en divisant le numérateur et le dénominateur de l'équation (3) par S_x on obtient

la formule de conversion d'un quotient en taux : $_1m_x^* = \frac{2\,_1q_x}{1+_1p_x} = \frac{2\,_1q_x}{2-_1q_x}$ (4)

et celle de conversion des taux en quotients : $_1q_x = \frac{2\,_1m_x}{2+_1m_x}$ (5)

On peut ensuite utiliser l'équation (5) pour démarrer la construction d'une table de mortalité à partir des taux de mortalité fournis par la statistique démographique…

Précision de la formule de conversion de $_nm_x$ en $_nq_x$

$$_nL_x = n \cdot S_{x+n} + {_na_x} \cdot {_nd_x}$$

où $_na_x$ – nombre moyen d'années vécues par les décédés entre âge ***x*** et ***x+n***

$$_nL_x = n \cdot (S_x - {_nd_x}) + {_na_x} \cdot {_nd_x} \Rightarrow n \cdot S_x = {_nL_x} + n \cdot {_nd_x} - {_na_x} \cdot {_nd_x} \Rightarrow$$

$$S_x = \frac{1}{n} \cdot \left[{_nL_x} + (n - {_na_x}) \cdot {_nd_x}\right] \Rightarrow {_nq_x} = \frac{_nd_x}{S_x} = \frac{n \cdot {_nd_x}}{_nL_x + (n - {_na_x}) \cdot {_nd_x}}$$

$$_nq_x = \frac{n \cdot \frac{_nd_x}{_nL_x}}{\frac{_nL_x}{_nL_x} + (n - {_na_x}) \cdot \frac{_nd_x}{_nL_x}} \Rightarrow {_nq_x} = \frac{n \cdot {_nm_x}}{1 + (n - {_na_x}) \cdot {_nm_x}}$$

Donc, la conversion des taux en probabilité ne dépend que de « $_na_x$ »

Greville T.N.E "Short Methods of Construction Life Tables" *Records from the American Institute of Actuaries,* 1943, vol. 32, part. 1, n° 65, juin 1943, p.29-42

Chiang C.L. *An Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics.* N.Y., Wiley 1968

Précision de la formule de conversion de m_x en q_x (suite)

$$ {}_nq_x = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x) \cdot {}_nm_x} $$

Quelle est la distribution des décès à l'intérieur de l'intervalle x,x+1: linéaire, exponentielle (ou autre) ?

1. Distribution uniforme

alors ***a=n/2*** => $ {}_nq_x = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_nm_x} $

on obtient la formule usuelle que Y.Péron (1971) appelle « actuarielle »

$$ {}_nq_x = \frac{2n \cdot {}_nm_x}{2 + n \cdot {}_nm_x} $$

2. Distribution exponentielle, **(on n'a pas besoin de $_na_x$, *qui se calcule à l'intérieur du modèle*)**

Si m_x est **constant** (densité uniforme) dans l'intervalle ***x, x+n*** et $ {}_nq_x = 1 - \frac{S_{x+1}}{S_x} \Rightarrow $

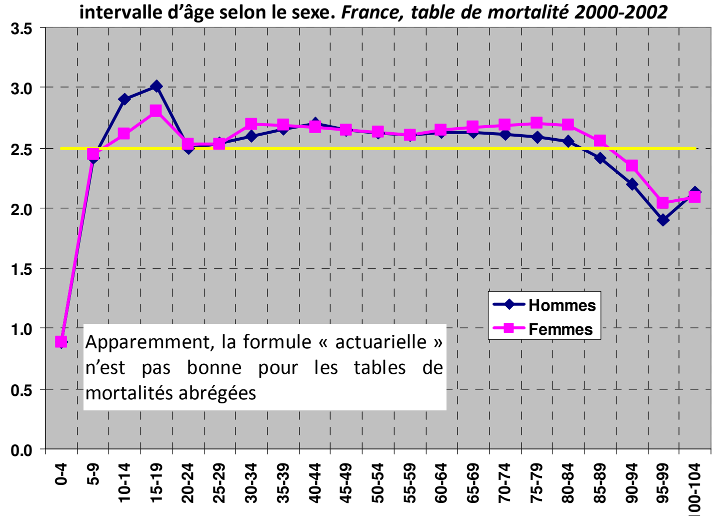
$$ {}_nq_x = 1 - \frac{S_{x+1}}{S_x} = 1 - \frac{S_x \cdot e^{-n \cdot {}_nm_x}}{S_x} \Rightarrow {}_nq_x = 1 - e^{-n \cdot {}_nm_x} \qquad {}_np_x = e^{-n \cdot {}_nm_x} \to S_x = e^{-\int_0^x \mu(x)dx} $$

où $\mu(x)$ - la force instantanée de mortalité

Yves Péron, « La construction de tables de mortalité abrégées : Comparaison de trois méthodes usuelles » // *Population*, 26e année, n°6, 1971 pp. 1125-1130

Problème de construction des tables de mortalités abrégées

Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge par les décédés dans cet intervalle d'âge selon le sexe. *France, table de mortalité 2000-2002*



Méthodes et hypothèse d'estimation $_na_x$ pour construire une table abrégée de la mortalité

1. Observation directe (situation rarissime): on peut déduire $_na_x$ à partir des dates exactes de naissances et de décès de chaque individu (s'il s'agit d'observation des décès et de survie, on estime directement S_x)
2. Tables empiriques (ou presque) et formule de ***Reed et Merrell*** établies à partir des tables de mortalités complète des États Unis pour 1910, 1920 et 1930, (cf. L. J. Reed et M. Merrell : « A short method for constructing an abridged life table » // *The American Journal of Hygiene*, vol. 30, n° 2, sept. 1939, p.33-62; reprinted p.43-51, dans D.Smith and N.Keifitz, eds., *Mathematical Demography*, NY, Springer Verlag, 1977).

$$_nq_x = 1-\exp(-n\cdot{}_nm_x - 0.008\cdot n^3\cdot{}_nm_x^2)$$

3. A partir de l'hypothèse de ***Greville*** sur le rapport log-linéaire entre $_nm_x$ et l'âge (x) conformément à la loi de Gomperz, (cf. Greville, 1943, voir diapositive n°16)

$$_nq_x = \frac{_nm_x}{1-{}_nm_x\left[\frac{1}{2}+\frac{n}{12}\cdot({}_nm_x - \ln c)\right]}$$

4. A partir de l'hypothèse de ***Keyfitz*** sur la distribution polynomiale de 2d degrè : (cf N.Keyfitz « A Life Table that Agrees with Data », // *Journal of American Statistical Association*, 1966, vol. 61, n° 314, p.305-312).

$$_na_x^i = \frac{-\frac{n}{24}\cdot{}_nd_{x-5} + \frac{n}{2}\cdot{}_nd_x + \frac{n}{24}\cdot{}_nd_{x+5}}{_nd_x}$$

5. A partir de l'hypothèse de ***Keyfitz et Frauenthal*** sur la linéarité de la distribution de $_nm_x$ entre les âges x-n et x+2n : (cf Keiftz N., J.Fraunthal, «An Improved Life Table Method», // *Biometrics*, 1975, vol. 31, p.889-899.

$$_np_x = \exp\left[-n\cdot{}_nM_x - \frac{n}{48\,{}_nN_x}\cdot({}_nN_{x-n} - {}_nN_{x+n})\cdot({}_nM_{x+n} - {}_nM_{x-n})\right]$$

$_nM_x$ – taux observés
$_nN_x$ – population âgée de x à x+n

6. Sinon on peut toujours imaginer que tout le monde meurt juste au milieu de l'intervalle d'âge et par conséquent ➔ $_na_x = 0{,}5\cdot n$

Espérance de vie à l'âge atteint et « le paradoxe » de la mortalité infantile

Soit $e_0 = \int_0^{\omega} Sdx = \sum_{x=0}^{\omega-1} {}_nL_x$ la durée moyenne de vie d'un nouveau né.

Pour ceux qui ont survécu jusqu'à l'âge X, la durée moyenne de vie sera composée de X années déjà vécues, + e_x (espérance de vie après l'âge X) : $e_{0|x} = x + e_x \rightarrow e_x = \int_x^{\omega} Sdx = \frac{\sum_x^{\omega-1} {}_nL_x}{S_x} = \frac{T_x}{S_x}$

On peut donc facilement trouver un rapport récurent entre e_x et e_{x+1}

Sachant que $T_{x+1} = T_x - {}_nL_x = e_x\cdot S_x - {}_nL_x$ on exprime $e_{x+1} = \frac{e_x\cdot S_x - {}_nL_x}{S_{x+1}} = \frac{e_x\cdot S_x - {}_nL_x}{_np_x\cdot S_x} = \frac{e_x - \frac{_nL_x}{S_x}}{_np_x}$

Avec le passage de l'âge X à X+1 l'espérance de vie diminue **de *moins d'un an*** puisque la durée de vie des individus décédés dans cet intervalle était forcement plus faible que celle de survivants. Par conséquent il se peut que e_{x+1} soit supérieure à e_x c'est ce qu'on observe souvent dans les âges de première enfance.

$$e_{x+1} - e_x = \frac{_nq_x\cdot e_x - \frac{_nL_x}{S_x}}{_np_x}$$

normalement < 0, puisque $_nq_x$ est trop petite et $_nL_x/S_x$ est proche à 1

mais pour x=0 (entre la naissance et le premier anniversaire),

$$e_1 - e_0 = \frac{_1q_0\cdot e_0 - {}_1L_0}{_1p_0} > 0, \quad \text{si} \quad {}_1q_0 > \frac{_1L_0}{e_0}$$

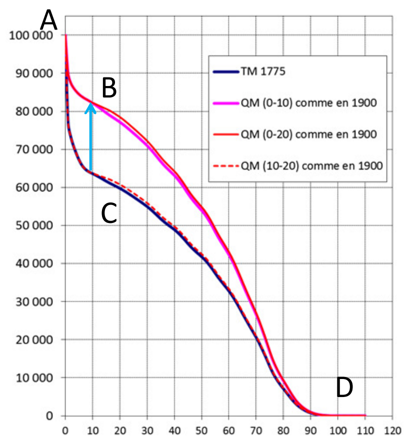
et surtout si $_1q_0 > \frac{1}{e_0}$ où $1/e_0$ est TBM de la population stationnaire (voir Annexe)

Donc, dans les populations où la mortalité infantile est supérieure au taux brut de mortalité de table ($TBM_{tm}=1/e_0$), $e_1 > e_0$. C'est un phénomène qu'on appelle parfois « le paradoxe de la mortalité infantile »

Analyse des gains de la durée de vie à cause de la baisse de la mortalité par âge

Comparons la mortalité suédoise de 1751 avec celle de 1900.

Quel gain de l'espérance de vie et pourquoi ?



Soit
il ne change que la survie jusqu'à l'âge de 10 ans;

et puisque par définition l'espérance de vie=

$$e_0 = \frac{\int_0^{\omega} S(x)dx}{S(0)}$$

le gain total sera égal à
la surface ABC
(gain direct à cause de l'augmentation de survie dans l'intervalle d'âge 0-10 ans)
+
la surface BDC
(gain « indirect » à cause de l'augmentation du nombre de survivants à l'âge 10 et par conséquent des années vécues après l'âge de 10 ans, ou un effet d'interaction)

On voit que la baisse de la mortalité sur l'intervalle d'âge entre 10 et 20 ans ne contribue que peu dans le gain total de l'espérance de vie entre 1751 et 1900

Décomposition de la différence entre l'espérance de vie

Eduardo ARRIAGA, "Measuring and Explaining the Change in Life Expectancy", *Demography,* 1984, vol.21, no.2, p.83-96

$$\boxed{{}_n\Delta_x = \frac{S_x^1}{S_0} \cdot \left(\frac{{}_nL_x^2}{S_x^2} - \frac{{}_nL_x^1}{S_x^1} \right) + \frac{T_{x+n}^2}{S_0} \cdot \left(\frac{S_x^1}{S_x^2} - \frac{S_{x+n}^1}{S_{x+n}^2} \right)}$$

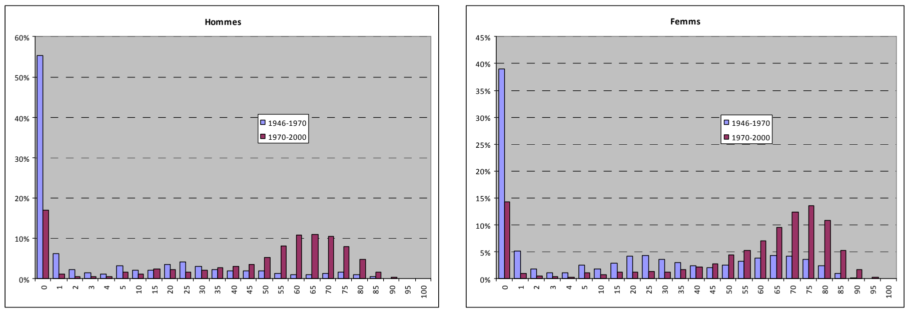
Pour l'intervalle fermé-ouvert $\boxed{{}_\infty\Delta_x = \frac{S_x^1}{S_0} \cdot \left(\frac{T_x^2}{S_x^2} - \frac{T_x^1}{S_x^1} \right)}$

Une autre (première) solution:
U.A. Kortchak-Tchepourkovski, publication de 1968 (avec une faute d'impression) et en 1987 en version correcte, utilisée par l'INSEE)
Cette solution a été indépendamment développée par **E.Andreev** (« Méthode de composant dans l'analyse de l'espérance de vie » // Vestnik Statistiki,1982, № 9. P. 42-48.) et
Rolland Pressat « Contribution des écarts de mortalité par âge à la différence des vies moyennes » // Population (French Edition), 40e Année, No. 4/5. (Jul. - Oct., 1985), pp. 766-770.

$${}_n\Delta_x = \frac{0.5 \cdot (S_x^1 + S_x^2)}{S_0} \cdot (e_x^2 - e_x^1) - \frac{0.5 \cdot (S_{x+n}^1 + S_{x+n}^2)}{S_0} \cdot (e_{x+n}^2 - e_{x+n}^1)$$

(voir INSEE, Résultats. Société, 2008, N°84: Beaumel C., Vatan M., 2008a, *La situation démographique en 2006* et diapositive suivante)

Contribution de la baisse de la mortalité pour les différents groupes d'âge quinquennaux à l'augmentation de l'espérance de vie à la naissance en France entre 1946 et 2000

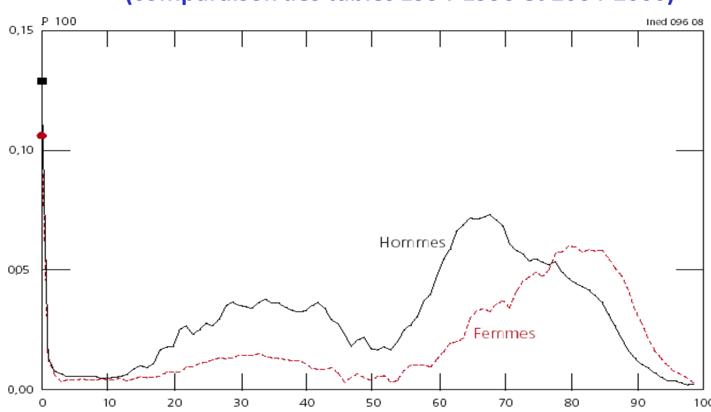


Le défaut de ces méthodes de décomposition que pour trois ou plus périodes consécutives ces résultats ne sont pas additifs, i.e.

$$\Delta e_0(2000-1946) \neq \Delta e_0(1970-1946) + \Delta e_0(2000-1970)$$

Cours « Analyse démographique » par Alexandre Avdeev 23

Contribution de la baisse de la mortalité à chaque âge à l'augmentation de l'espérance de vie a la naissance entre 1995 et 2005 (comparaison des tables 1994-1996 et 2004-2006)



Source: Beaumel C., Vatan M., 2008, *La situation démographique en 2006* INSEE, Résultats. Société, 2008, N°84

Lecture: Sur le 3 ans d'espérance de vie gagnés entre 1995 et 2005 par les hommes, 0,13 d'année ont été gagné grâce à la baisse de la mortalité infantile (à l'âge 0), chez les femmes la baisse de la mortalité infantile a permit de gagner 0.11 d'année sur le gain total de 2,04 d'année.

Cours « Analyse démographique » par Alexandre Avdeev 24

Annexe

Table de mortalité comme modèle de croissance de la population

Rappel : voir partie 1 du cours

Le temps est discret : ➔ $P(t) = k \cdot P(t-1)$

$$P(t) = k^t \cdot P(0)$$

k – taux de croissance

Le temps est continu : ➔ $\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r$

$$P(t) = e^{rt} \cdot P(0)$$

r – taux d'accroissement

$$k = e^r \quad ou \quad k = \exp(r) \qquad r = b - d$$

Annexe

Le taux d'accroissement et la probabilité de survie

$$P(T) = P(0) \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t} \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t} \ldots \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t} =$$

$$= P(0) \cdot e^{r(t)\cdot\Delta t + r(t)\cdot\Delta t + \ldots + r(t)\cdot\Delta t} = P(0) \cdot e^{\int_0^T r(t)\cdot dt}$$

$$P(T) = P(0) \cdot e^{\int_0^T r(t)dt} \Rightarrow P(T) = P(0) \cdot e^{\bar{r}[0;T]\cdot T}$$

$$P(t) = P(0) \cdot e^{r\cdot T} \Rightarrow P(t) - P(0) = P(0) \cdot (e^{r\cdot T} - 1)$$

$$\frac{P(t) - P(0)}{P(0)} = (e^{r\cdot T} - 1) \Rightarrow p = e^{r\cdot T}$$

Sachant que ***r = n – m***; et que ***n=0*** ➔ $p = e^{-m\cdot T}$

Annexe

Le taux d'accroissement et la probabilité de décès

$$P(T) = P(0) \cdot e^{\bar{r}[0;T] \cdot T} \Rightarrow P(0) - D(t) = P(0) \cdot e^{r \cdot T}$$

$$P(0) - P(0) \cdot e^{r \cdot T} = D(t) \rightarrow D(t) = P(0) \cdot \left(1 - e^{r \cdot T}\right)$$

$$(1 - e^{r \cdot T}) = \frac{D(t)}{P(0)} \Rightarrow (1 - \frac{D(t)}{P(0)}) = e^{r \cdot T}$$

$$(1 - q) = e^{r \cdot T} \qquad q = 1 - e^{r \cdot T}$$

Annexe

Le taux de mortalité de table est le taux d'accroissement pour une génération dans la population stationnaire

La population stationnaire → la population de la table de mortalité L_x.

La population stationnaire → $\sum_x L_x$

On peut réécrire la formule de croissance

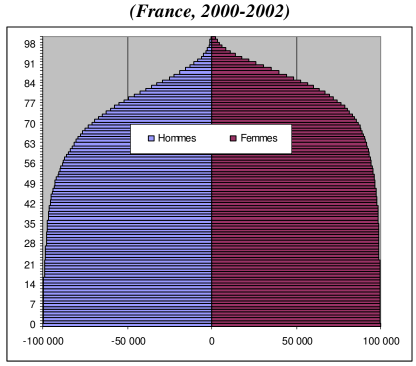
$$(1 - e^{r \cdot T}) = \frac{D(t)}{P(0)}$$

pour une génération de table $(1 - e^{r \cdot T}) = \frac{d_x}{S_x}$

Comme $q_x = (1 - e^{r \cdot T})$ et $r = -m$

L'accroissement est toujours négatif (la population se diminue) il faut le prendre avec la signe moins (négative)

Population stationnaire de la table de mortalité (France, 2000-2002)



Formules de conversion des taux en quotient → $_nq_x = (1 - e^{-m_x \cdot n})$

$$\frac{\ln(1 - {}_nq_x)^{-1}}{n} = m_x$$