Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie

Cours d'analyse démographique niveau : **Master de démographie** par Alexandre Avdeev,

Chapitre 4

Analyse des taux : comparaison, standardisation, décomposition

1. Equation du bilan démographique avec les taux bruts
2. Relation entre les taux bruts et les taux par âge, difficultés de la comparaisons des taux bruts.
3. Méthodes de calculs des taux « comparatifs », ou la standardisation
   - Directe
   - Indirecte
   - Inverse
4. Décomposition d'une différence entre les taux bruts
   - Modèles additifs sans et avec interaction.
   - Modèles multiplicatifs

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

1

rappel

Équation de bilan démographique avec des valeurs absolues

$$P_t = P_0 + N_{0,t} - D_{0,t} + I_{0,t} - E_{0,t}$$

P_t – nombre de survivants au moment t

P_0 – nombre de survivants au moment 0 (précédant à t)

$N_{0,t}$ – nombre de naissances durant la période entre 0 et t

$D_{0,t}$ – nombre de décès durant la période entre 0 et t

$I_{0,t}$ – nombre migrants arrivés durant la période entre 0 et t

$E_{0,t}$ – nombre migrants partis durant la période entre 0 et t

	Population au 1 janvier 2000	au cours de l'année			Population au 1 janvier 2001	Ajustement statistique
		Naissance	Décès	solde migratoire		
France	58 858 198	(+)774 782	(-)535 066	(+) 70 000	(=) 59 266 572	(+) 94 456
Danemark	5 330 020	(+) 67 084	(-) 57 986	(+) 10 094	(=) 5 349 212	(+) 596

C'est un bon instrument pour les estimations nationales, mais les comparaisons internationales sont difficiles avec des valeurs absolues

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

2

Équation de bilan démographique avec les taux bruts

$$\frac{P_t - P_0}{t \cdot \bar{P}_{0,t}} = \frac{N_{0,t}}{t \cdot \bar{P}_{0,t}} - \frac{D_{0,t}}{t \cdot \bar{P}_{0,t}} + \frac{I_{0,t}}{t \cdot \bar{P}_{0,t}} - \frac{E_{0,t}}{t \cdot \bar{P}_{0,t}}$$

$$TBA = (TBN_{0,t} - TBM_{o,t}) + (TBI_{0,t} - TBE_{0,t})$$

$$TBA = TBAN_{0,t} + TBAM_{0,t}$$

Années vécues par la population initiale durant la période T(0,t), ou « population moyenne de l'année »

France ➔ **0.5 x (58 858 198 + 59 266 572) = 59 062 385**

Danemark ➔ **0.5 x (5 330 020 + 5 349 212) = 5 339 616**

	TBA	TBN	TBM	TBAM
France	**0, 006914**	**(+) 0,0132**	**(-) 0,00899**	**(+) 0,00119**
Danemark	**0,00359**	**(+) 0,01256**	**(-) 0,01086**	**(+) 0,00189**

ou (pour facilité la perception) pour 1000 population (pour 1000 années vécues)

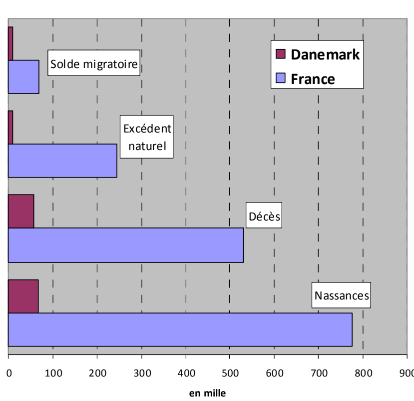
	TBA	TBN	TBM	TBAM
France	**6,914**	**(+) 13,118**	**(-) 8,988**	**(+) 1,185**
Danemark	**3,594**	**(+) 12,563**	**(-) 10,860**	**(+) 1,779**

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

3

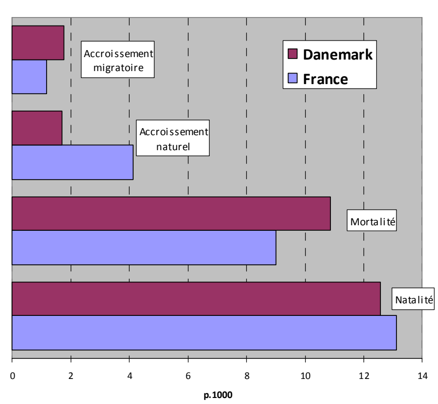
Analyse visuelle des composants du mouvement de la population en France et en Danemark à l'an 2000

A. Nombre d'événements



C'est difficile à interpréter à cause de la domination numérique de la population française

B. Taux bruts



C'est facile à interpréter puisque l'effectif de la population est réduit à 1000 pour les deux pays

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

4

2. Relation entre les taux bruts et les taux par âge, difficultés de la comparaisons des taux

Rapport entre les taux par âge et les taux bruts

Soit $D^a_{0,t}$ le nombre de décès à l'âge « a » durant une période entre 0 et t; et
$N^a_{0,t}$ le nombre de naissance à l'âge « a » durant une période entre 0 et t.

taux par âge		événement par âge
$m^a_{0,t} = \dfrac{D^a_{0,t}}{t \cdot \bar{P}^a_{0,t}}$	taux de mortalité pour âge « a » et période [0,t)	$D^a_{0,t} = m^a_{0,t} \cdot t \cdot \bar{P}^a_{0,t}$
$f^a_{0,t} = \dfrac{N^a_{0,t}}{t \cdot \bar{P}^a_{0,t}}$	taux de fécondité pour âge « a » et période [0,t)	$N^a_{0,t} = f^a_{0,t} \cdot t \cdot \bar{P}^a_{0,t}$

Alors les sommes d'événements et, par conséquent, les taux bruts, dépendent des taux par âge

Etant donné que la durée de la période est une année (t = 1), nous pouvons nous passer du symbole t des formules

Les taux bruts sont des moyennes arithmétiques des taux par âge

$$TBM = \frac{D_{0,t}}{t \cdot \bar{P}_{0,t}} = \frac{\sum_a D_{0,t}^a}{t \cdot \sum_a \bar{P}_{0,t}^a} = \frac{t \cdot \sum_a m_{0,t}^a \cdot \bar{P}_{0,t}^a}{t \cdot \sum_a \bar{P}_{0,t}^a} = \sum_a m_{0,t}^a \cdot p_{0,t}^a$$

$$TBN = \frac{N_{0,t}}{t \cdot \bar{P}_{0,t}} = \frac{\sum_a N_{0,t}^a}{t \cdot \sum_a \bar{P}_{0,t}^a} = \frac{t \cdot \sum_a f_{0,t}^a \cdot \bar{P}_{0,t}^a}{t \cdot \sum_a \bar{P}_{0,t}^a} = \sum_a f_{0,t}^a \cdot p_{0,t}^a$$

sous une forme générale: ⇒ $$\boxed{TB = \sum_{a=0}^{\omega} \tau_a \cdot w_a}$$

où
τ_a – taux par âge
w_a – vecteur de pondération

et avec l'expression vectorielle : $TB = \vec{\mathrm{T}}_a \cdot \vec{W}_a$

On voit qu'un taux brut est le produit scalaire de deux vecteurs de dimension « a »

Comparaison des taux brut de mortalité féminine en Suède et en Kazakhstan, 1992[1)]

Suède:

Population moyenne durant l'an 1992 . . . . 4 385 469
Nombre de décès en 1992. . . . . .46 259

Taux de mortalité (46 259 /4 385 469) ………… 10,55‰

Kazakhstan:

Population moyenne durant l'an 1992 . . . . 8 698 860
Nombre de décès en 1992. . . . . .64 752

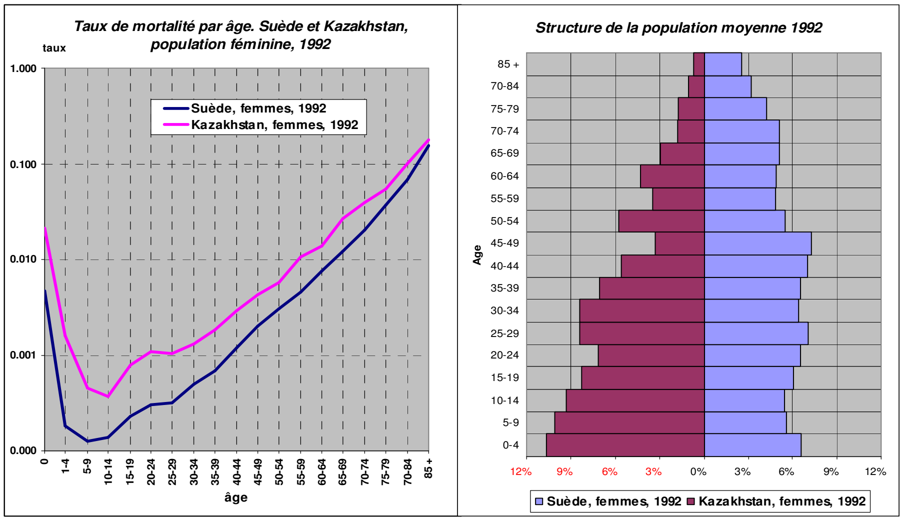
Taux de mortalité (64 752/ 8 698 860) . . . . .7,42‰

Conclusions : **(vrai ou faux)**

1) **$D_{(Suède)} < D_{(Kazakhstan)}$ → la mortalité en Suède est de 1,4 fois inférieure à celle au Kazakhstan ?**
2) **$TBM_{(Suède)} > TBM_{(Kazakhstan)}$ → la mortalité en Suède est de 1, 4 fois supérieure à celle au Kazakhstan ?**

[1)] Source: S. Preston et al. (2001), p. 27

Composants des taux bruts de mortalité féminine en Suède et en Kazakhstan, 1992



La mortalité par âge au Kazakhstan est supérieure à celle en Suède → le risque moyen de mourir pour une femme suédoise est < que celui pour une femme kazakh.

La population de la Suède est plus vieille que celle du Kazakhstan (% de personnes âgé de plus de 70%). Cela pourrait influencer le score du TBM

3. Méthodes de calculs des taux « comparatifs », ou la standardisation :

- **Standardisation directe (W.Ogle, 1883)[1]**
- **Standardisation indirecte (F. Neison, 1844 / W. Farr, 1855)[2]**
- **Standardisation inverse(1958)[3]**

Lectures:

G.Wunsch « Variables de confusion, standardisation et indices résumés » dans G.Caselli, J.Vallin, G.Wunsch (dir) *Démographie: analyse et synthèse*. Vol. 1. *La dynamique des populations*. Ined, Paris, 2001, p.329-348

Wunsch, Guillaume J. et Eveline Thiltgès (1995) – « Une confusion standardisée: variables confondantes et standardisation » *Genus*, vol.50, n°3-4, p.27-59

Bibliographie:

1) W.Ogle – Annual Summary of of Births, Deaths, and Causes of Deaths in London and other great towns 1883, 1884, p.III

2) F.G.P. Neison. "On a method recently proposed for conducting inquiries into the comparative sanitary condition of various districts." Journal of the Statistical Society of London. VII, 1844; apliquée par William Farr in "The 16th Annual Report of the Registrar-General of Births, Deaths and Marriage in England and Walles" (1855)

3) ??? D.Carrige

Voir aussi : http://isi.cbs.nl/glossary/term953.htm

J.Körösi – "Motalitäts-Coefficient und Mortaliäts-Index" Bulletin de l'Institut International de Statistique, t.VI, 1892

L. v.Bortkewitsch – Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, Jahrbücher für Nationalökonomie and Statistik, III. Folge. Jena 1896, Artikel: „Ueber die Methode der „Standard Population" = Bulletin de l'Institut International de Statistique, t.XIV, 2 liv. Berlin 1904, p.417-437, t.XI, 1 liv.1, p.173-176,178.

Quatre raisons pour prendre en considération les compositions par âge

- ✓ Les taux de mortalité varient beaucoup avec âge.
- ✓ La composition par âge des populations varie considérablement.
- ✓ La composition de la population par âge est une caractéristique démographique important déterminée par *l'histoire* de la natalité, de la mortalité et de la migration.
- ✓ Données sur les décès et l'effectif de la population par âge sont le plus souvent disponibles.

Comparaison des taux (bruts) : standardisation

Puisque le score des taux bruts dépendent de l'intensité du processus aussi bien que de la structure de la population par âge, il est souvent difficile d'interpréter la différence entre les taux bruts, ainsi que leur dynamique. Pour surmonter cette difficulté et rendre les taux bruts comparables on fait recours à une procédure particulière, qu'on appelle *la standardisation* ou le calcul des *taux « comparatifs »*.

Lecture recommandée :

- Guillaume Wunsch – « Variables de confusion et indices résumés » Dans: Caselli, G., J.Vallin et G.Wunsch *Démographie: analyse et synthèse.* Vol.1: La dynamique de la population. Edition de l'INED, Paris, 2001, p.329-448
- Leridon, H. et L.Toulemon – *Démographie. Approche statistique et dynamique des populations.* Economica, Paris, 1997. (Chapitre 11: « Standardisation »), p.191-209.
- Henry, L. – « Démographie. Analyse et modèles ». Edition de l'INED, Paris, 1984, p.157-158 et p.170.

La standardisation « directe »

Idée de base :

Calculez pour une population (dite standard, ou « population-type ») les taux bruts correspondants au chaque assortiment des taux par âge, qu'on observe dans des population réelles.

Donc on combine les taux par âge de chaque population avec une structure par âge figée.

On appelle cette méthode « standardisation directe » puisqu'elle permet de calculer directement les taux bruts comparatifs (on dit « taux comparatifs » tout court)

Données indispensables :

1. Le nombre d'événements classés par catégories de structure dans toutes les populations à comparer.
2. L'effectif de chaque catégorie de structure dans toutes les populations à comparer

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

13

Deux exercices de la standardisation directe

1. Calculons des taux bruts comme si la structure de la population en Kazakhstan était la même qu'en Suède, alors on pourrait attribuer la différence entre les taux bruts de mortalité de deux pays à la différence de la mortalité par âge :

$$TBM^{s}_{Suède} = \sum_a m_a^{Suède} \cdot C_a^{Suède} \quad et \quad TBM^{s}_{Kazakh} = \sum_a m_a^{Kazakh} \cdot C_a^{Suède}$$

$$TBM^{S}_{Suède} = 10{,}55‰ \qquad \text{et} \qquad TBM^{S}_{Kazakh} = 16{,}34‰$$

2. On peut inverser la situation et calculer les TBM pour la Suède comme si elle a la même structure de la population que le Kazakhstan, les valeurs des « taux comparatifs » ne sont pas les même que dans le premier exercice, mais le rapporte entre eux reste à peu près le même :

$$TBM^{K}_{Suède} = \sum_a m_a^{Suède} \cdot C_a^{Kazakh} \quad et \quad TBM^{K}_{Kazakh} = \sum_a m_a^{Kazakh} \cdot C_a^{Kazakh}$$

$$TBM^{K}_{Suède} = 4{,}20‰ \qquad \text{et} \qquad TBM^{K}_{Kazakh} = 7{,}42‰$$

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

14

Le choix d'un standard

Standard vieux:

$TBM^{S}_{\ Suède} = 10{,}55‰$

$TBM^{S}_{\ Kazakh} = 16{,}34‰$

Standard jeune:

$TBM^{K}_{\ Suède} = 4{,}20‰$

$TBM^{K}_{\ Kazakh} = 7{,}42‰$

Solution 1 : standard « moyen »

Pour comparer la population A avec la population B le standard soit

$$C_a^s = \frac{C_a^A + C_a^B}{2}$$

Standard moyen:

$TBM^{m}_{\ Suède} = 7{,}37‰$

$TBM^{m}_{\ Kazakh} = 11{,}88‰$

Solution 2 : population type → une variante d'une population « moyenne » (ex. standard européen, voir le fichier sur EPI)

La standardisation « indirecte »

Idée de base :

Estimer la différence (rapport) entre le nombre de décès observé dans une population, avec celui qui pourrait avoir lieu, si la mortalité par âge était comme dans une population de référence (mortalité standard).

Ainsi on peut calculer une série des taux comparatifs (« standardisés ») par rapport à un taux brut d'une population de référence.

Donc on combine les structures par âge de chaque population avec un assortiment des taux par âge.

On appelle cette méthode « standardisation indirecte » puisque on compare les niveau de la mortalité par intermédiaire d'un indicateur médiat.

Données indispensables:

- ✓ Le nombre total d'événements pour toutes les populations à comparer.
- ✓ Le nombre d'événements classés par catégories de structure au moins dans une des populations à comparer.
- ✓ L'effectif de chaque catégorie de structure dans toutes les populations à comparer.

Rapport comparatif de mortalité
(Comparative Mortality Ratio)

Le rapport entre le nombre observé de décès dans la population et le nombre espéré de décès sous la conditions que la mortalité par âge correspond à un standard.

Si dans la population (A) la distribution de décès par âge est inconnue

$$RMC = \frac{\sum_a m_a^A \cdot P_a^A}{\sum_a m_a^B \cdot P_a^A} = \frac{D^A}{\sum_a m_a^B \cdot P_a^A}$$

où

D^A => nombre de décès tous âges confondu dans la population A ;

P^A_a =>effectif de la groupe dans l'intervalle d'âge « a » dans la population A

m^B_a=>taux de mortalité dans l'intervalle d'âge « a » dans la population B

Deux exercices de la standardisation indirecte

1. Si la mortalité par âge en Suède était comme au Kazakhstan (standard=Kazakhstan), le nombre de décès en Suède était 71 660:
   $RMC_{Suède}$ = 46 256 : 71 660 ≈ 0,65
   et le taux brut de mortalité était (taux comparatif) ≈ 4,8 et non 10,55

$$TBM^C_{Suède} = RCM_{Suède} \times TBM_{Kazakh} = 0{,}65 \cdot 7{,}4 = 4{,}8 \quad \text{TBM}_{standard} = 7{,}4$$

Conclusion : « La mortalité au Kazakhstan est 1,5 (1/0.65) fois supérieure de la mortalité en Suède

2. Si la mortalité par âge au Kazakhstan était comme en Suède (standard=Suède), le nombre de décès y était 36 541 :
   RMC_{Kazak} = 64 563 : 36 541 ≈ 1.77
   et le taux brut de mortalité y était ≈ 18,7 et non 7,42

$$TBM^C_{Kazakh} = RCM_{Kazakh} \times TBM_{Suède} = 1{,}77 \cdot 10{,}55 = 18{,}7 \quad \text{TMB}_{Standard} = 10{,}55$$

Conclusion : « La mortalité en Suède est 1,8 fois inférieure de la mortalité au Kazakhstan

Algorithme général de calculs (standardisation indirecte)

$$TBMC^A = RMC^A \cdot TBM^{stndrd} =$$

$$= \frac{D^A}{\sum_a m_a^{stndrd} \cdot P_a^A} \cdot \frac{\sum_a m_a^{stndrd} \cdot P_a^{stndrd}}{\sum_a P_a^{stndrd}}$$

TBMC^A – taux brut (de mortalité) comparatif pour la population A;

P^i_a – effectif du group a dans une population i (i=A, i=standard)

m_a^{stndrd} – taux de mortalité par group (d'âge) dans une population standard

D^A – nombre de décès dans la population A pour laquelle on calcule le taux brut comparatif

Register-General de Grande Bretagne applique cette méthode pour comparer la mortalité des groupes SP.

1er exemple d'applications de la standardisation indirecte:

1. Rapport comparatif de la mortalité (standardized mortality ratio en USA) est un indicateur des risques relatifs de décès selon les catégories socioprofessionnelles.

Age	Nombre des mineurs de race blanche de sexe masculin Px	Taux de mortalité de tuberculeuse (tous les actifs) Mx
20-24	74 589	0,0001260
25-29	85 077	0,0001612
30-34	80 845	0,0002154
35-44	148 870	0,0003396
45-54	102 649	0,0005682
55-59	42 494	0,0007526
60-64	30 037	0,0008237
Total 20-64	564 570	0,0009565

Nombre attendu de décès des mineurs = $\Sigma(M_x P_x)$ = 206

Nombre de décès enregistré en 1950 par US National Office of Vital Statistics était d=540

Les mineurs ont 2,6 fois plus de risque de mourir de tuberculeuse qu'un travailleur « moyen ».

$$SMR = \frac{d}{\sum M_x \cdot P_x} = \frac{\sum m_x \cdot P_x}{\sum M_x \cdot P_x} = \frac{540}{206} = 2{,}63$$

2d exemple d'applications de la standardisation indirecte:

2. ***Rapport proportionnel de mortalité standardisé par âge***(1) (utilisé en 1997 dans le rapport de *U.S. NIOSH: 24 Reporting Stats, 1984-1988, by C.Burnett et al*.) estime les risques de décès selon les catégories socioprofessionnelles: *(4 groups sexe–race) x (3 groups d'âge) x (325 catégories d'emploi) x (235 catégories d'industrie) x (188/192 causes de décès pour femmes/hommes) = 174 135 000 combinaisons*

Catégories socioprofessionnelles	Cause X	Autres causes	Toutes causes
Catégorie Y	A_i	B_i	N_{1i}
Autres catégories	C_i	D_i	N_{2i}
Toutes catégories	M_{1i}	M_{2i}	Ti

Soit $$E(A_i) = \frac{M_{1i} \cdot N_{1i}}{T_i}$$

un nombre attendu de décès pour une catégorie professionnelle (Y=1), d'une cause de décès (X) et group d'âge (i), alors

$$RPM = \frac{\sum A_i}{\sum E(A_i)} \cdot 100$$

Une avantage : on n'a pas besoin de données qui sont indispensables pour les autres méthodes de standardisation.

Les désavantages :

1. Ce n'est pas un taux mais un rapport (dénominateur=nombre total de décès)
2. Si le risque moyen pour une branche d'industrie est faible, RPM peut surestimer les risques relatifs, et inversement, il sous-estime les risques, là où le risque moyen est fort.
3. Le RPM pourrait aussi être biaisé par une très forte mortalité d'une cause ou des causes majeures de décès (sous-estimation des risques, si le nombre de décès d'une cause est trop élevé et inversement)
4. Le RPM peut être affecté, si des catégories non-declarées ne sont pas distribuées proportionnellement

(1) Cf. McGehe « Mortality », in J.S.Siegel and D.A.Swanson (ed), *The Methodes and Materials of Demography*, 2d edition, Emerald, 2008, p.282

La standardisation « inverse »

Idée de base :

Comparer l'effectif d'une population avec celui que cette population devrait avoir pour produire tel nombre de décès, qu'elle produise, si ses taux de la mortalité par âge était comme dans une population de référence (mortalité standard, nombre de décès par âge connu, effectif total connu). Cette méthode est « inverse » puisque à la place de comparer directement les taux de mortalité, ou des nombres de décès on estime et compare l'effectif d'un population.

Données indispensables:

- ✓ Le nombre d'événements classés par catégories de structure pour toutes les populations à comparer.
- ✓ L'effectif de la population par âge au moins dans une des populations à comparer (ou les taux standards).
- ✓ Les effectifs totaux de toutes les populations à comparer (les structures sont inconnues).

Méthode de calculs des taux comparatifs :

$$K^s = \frac{\sum_a \frac{T_a}{t_a^s}}{P} K'$$

K^s – taux brut standardisé (taux comparatif)

T_a – nombre d'événements classés par âge (catégorie de structure)

t^s_a – taux d'une population standard

P – effectif de population à étudier

K' – taux brut pour la population standard

Problème de prise en considération deux (ou plus) facteurs structuraux

La dynamique de mortalité dépend des plusieurs dimensions de structure superposées, e.g. de celle par âge et celle par sexe.

Comparons les changements de la mortalité générale au Kazakhstan entre 1981 et 2008

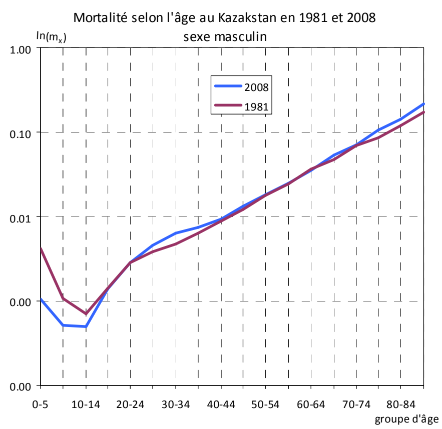
On pourrait prendre comme standard une des sous-populations (e.g. hommes en 2008) et calculer les taux comparatif pour les autres.

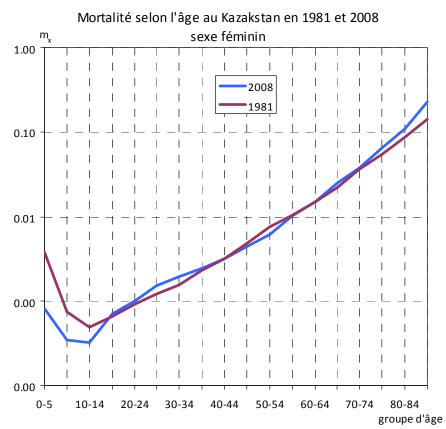
Caractéristiques		TBM (observé)			TCM (standard homme 2008)		
Sexe		1981	2008	variation	1981	2008	variation
	Hommes	9.132	11.245	2.11	10.933	11.245	0.312
	Femmes	6.98	8.296	1.32	5.584	5.438	-0.146
	Les deux sexes	8.017	9.715	1.698	7.795	7.962	0.168
Rapport de masculinité (hommes pour 100 femmes)		92.9	92.7	-0.2	100	100	0

On peut accepter et interpréter ce résultat, mais de fait un tel calcul ne prend pas en considération les changements du niveau de mortalité apportés par la variation du rapport de masculinité

Analyse visuelle des données montre :

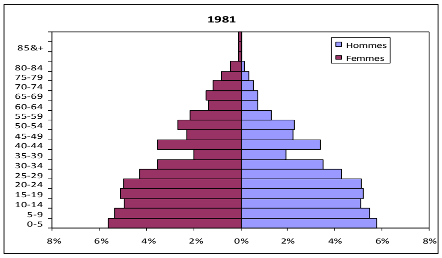
1 . Une évolution de mortalité par âge selon le sexe quasi-identique, mais avec une petite différence non négligeable

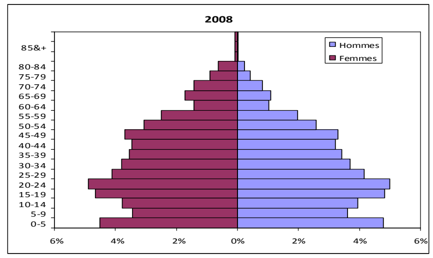


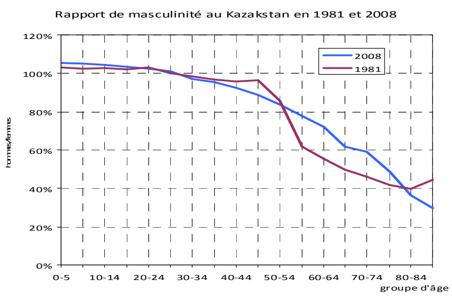


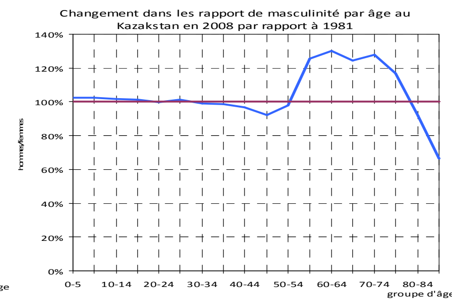
Analyse visuelle des données montre :

2 . Des changements importants de la structure par âge et du rapport de masculinité









Double standardisation : prise en considération deux (ou plus) facteurs structuraux

$$TCM = \sum m_{2008}^{h} \cdot c_{1981}^{h} + \sum m_{2008}^{f} \cdot c_{1981}^{f}$$

où $${}^{a}c_{x}^{s} = \frac{{}^{a}p_{x}^{s}}{\sum_{x}\sum_{s} {}^{a}p_{x}^{s}}$$ telle qu'on calcule pour dessiner une pyramide de la population

Donc on standardise le niveau de mortalité générale sous une hypothèse la structure de la population par âge et par sexe ne change pas.

Les résultas de calcul montre que TCM 2008 = 8.19‰ (TBM 2000 = 9,7‰)
et en 1981 TBM =8.02‰

Conclusion : si on prend en considération tous les facteurs structuraux, on dirait que la mortalité au Kazakhstan a augmenté en 2008 par rapport à 1981, malgré une baisse important de la mortalité infantile et juvénile

4. Décomposition d'une différence entre les taux bruts

- **Modèles additifs sans et avec interaction.**
- **Modèles multiplicatifs**

Décomposition de la différence entre deux taux: Chicago 1948

Eveline.M. Kitagawa – « Components of Difference between Two Rates » *Journal of the American Statistical Association,* vol.50, no. 272, (dec.1955), p.1168-1194

Abram J. Jaffe – *Handbook of statistical methods for demographers; selected problems in the analysis of census data*. Washington, U.S. Govt. Print. Off., 1951

$$\Delta = TBM^{B} - TBM^{A} = \sum_{i} m_i^B \cdot C_i^B - \sum_{i} m_i^A \cdot C_i^A$$

Transformation de la différence entre les taux buts

$$\Delta = TBM^B - TBM^A = \sum_i m_i^B \cdot C_i^B - \sum_i m_i^A \cdot C_i^A$$

$$\Delta = \boxed{\frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{2} + \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{2}} - \boxed{\frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}{2} - \frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}{2}} +$$

$$+ \boxed{\frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^B}{2} - \frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^B}{2}} + \boxed{\frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^A}{2} - \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^A}{2}}$$

On peut regrouper les huit membres de cette équation en quatre groupes (comme c'est indiqué par des flèches)
et ensuite – en deux …

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

29

suite:

$$\Delta = \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\ \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{2} & - \frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}{2} & + \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{2} & - \frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}{2} + \\ + \frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^B}{2} & - \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^A}{2} & + \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^A}{2} & - \frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^B}{2} \end{array}$$

$$\Delta = \left[\sum_i C_i^B \left(\frac{m_i^B + m_i^A}{2} \right) - \sum_i C_i^A \left(\frac{m_i^B + m_i^A}{2} \right) \right] +$$

$$+ \left[\sum_i m_i^B \left(\frac{C_i^B + C_i^A}{2} \right) - \sum_i m_i^A \left(\frac{C_i^B + C_i^A}{2} \right) \right]$$

Alexandre Avdeev, cours « Analyse démographique », IDUP, master de démographie

30

Formule définitive

$$\Delta = \sum_i \left(C_i^B - C_i^A\right)\cdot\left(\frac{m_i^B + m_i^A}{2}\right) + \sum_i \left(m_i^B - m_i^A\right)\cdot\left(\frac{C_i^B + C_i^A}{2}\right)$$

La différence des structures par âge x **Pondérée par la mortalité moyenne par âge** + **La différence des mortalités par âge** x **Pondérée par la structure moyenne par âge**

$\Delta =$ **Changement imputable à la composition de la population par âge** + **Changement imputable à la différence des taux de mortalité par âge**

Exemple numérique de décomposition

Taux brut de mortalité en 1992, population féminine :

Suède . . . . 10,55‰
Kazakhstan . . . . . 7,42‰

Suède – Kazakhstan = 10,55‰ – 7,42‰ = 3,13%

Cette différance (3,13‰) peut être décomposée en :
en +7.63‰ - la partie de la variation qu'on peut amputer à la différence des structures
et en -4.51‰ la partie de la variation qu'on peut amputer à la différence des mortalités
→ 7,63‰ – 4,51‰ = 3,13‰

7,42 ‰ – 4,507 ‰ + 7,633 ‰ = 10,55 ‰

10.55 ‰ + 4,51 ‰ = 15,06 ‰ telle pourrait être la mortalité en Kazakhstan, si la mortalité était pareille dans les deux populations

7,42 ‰ + 7,63 ‰ = 15,05 ‰ telle pourrait être la mortalité en Kazakhstan, si les structures de deux populations étaient similaires

Décomposition avec la prise en considération de l'interférence (« l'interaction »)

$$\Delta = TBM^{B} - TBM^{A} = \sum_i m_i^B \cdot C_i^B - \sum_i m_i^A \cdot C_i^A$$

soit $\Delta_i^M = m_i^B - m_i^A$ alors $m_i^A = m_i^B + \Delta_i^M$

et

$\Delta_i^C = C_i^B - C_i^A$ ➔ $C_i^A = C_i^B + \Delta_i^C$

suite:

$$\Delta = \sum_i m_i^B \cdot C_i^B - \sum_i m_i^A \cdot C_i^A =$$

$$= \sum_i \left[\left(m_i^A + \Delta_i^M\right) \cdot \left(C_i^A + \Delta_i^C\right)\right] - \sum_i m_i^A \cdot C_i^A =$$

$$= \sum_i \left(m_i^A \cdot C_i^A + m_i^A \cdot \Delta_i^C + \Delta_i^M \cdot C_i^A + \Delta_i^M \cdot \Delta_i^C\right) - \sum_i m_i^A \cdot C_i^A =$$

$$= \sum_i m_i^A \cdot \Delta_i^C + \sum_i \Delta_i^M \cdot C_i^A + \sum_i \Delta_i^M \cdot \Delta_i^C$$

$$= \sum_i m_i^A \cdot \left(C_i^B - C_i^A\right) + \sum_i C_i^A \cdot \left(m_i^B - m_i^A\right) + \sum_i \left(C_i^B - C_i^A\right) \cdot \left(m_i^B - m_i^A\right)$$

ou

$$= \sum_i m_i^B \cdot \left(C_i^B - C_i^A\right) + \sum_i C_i^B \cdot \left(m_i^B - m_i^A\right) - \sum_i \left(C_i^B - C_i^A\right) \cdot \left(m_i^B - m_i^A\right)$$

Les inconvénients de l'interférence ou de « l'interaction »

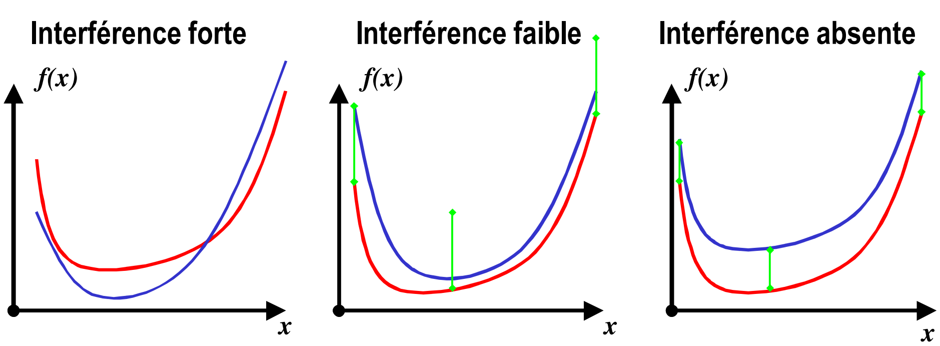
- ✓ Elle peut être positive où négative (la covariance);
- ✓ Elle entre dans la formule avec la signe positive ou négative;

$$\Delta = \boxed{\sum_i m_i^A \cdot \left(C_i^B - C_i^A\right)} + \boxed{\sum_i C_i^A \cdot \left(m_i^B - m_i^A\right)} + \boxed{\sum_i \left(C_i^B - C_i^A\right) \cdot \left(m_i^B - m_i^A\right)}$$

Changement imputable à la variation de la compositions des populations + **Changement imputable à la variation des taux de mortalité** + (−) **Changement dû à la variation conjointe (« interférence ») des taux de mortalité et de la composition des populations**

L'interaction (interférence) entre deux distributions:

Voir: **Wunsch, Guillaume J. et Eveline Thiltgès** (1995) – « Une confusion standardisée: variables confondantes et standardisation » *Genus,* vol.50, n°3-4, p.27-59



Exemple numérique de décomposition avec la prise en compte de l'interférence

Taux brut de mortalité en 1992, population féminine :

Suède . . . . 10,55‰

Kazakhstan . . . . . 7,42‰

Suède – Kazakhstan = 10,55‰ – 7,42‰ = 3,13%

Cette différance (3,13‰) peut être décomposée en :
en +8,918‰ - la partie de la variation qu'on peut amputer à la différence des structures,
en -3.22‰ la partie de la variation qu'on peut amputer à la différence des mortalités,
et en -2,57‰ la partie de la variation qu'on peut amputer à l'interférence structurelle
→ ***8,918‰ – 3,22‰ – 2,57‰ = 3,13‰***

$\mu_i = \mu_s + \alpha + \beta + \alpha \cdot \beta$

7,42 ‰ + 8,918 ‰ – 3,22 ‰ – 2,57 ‰ = 10,55 ‰

10.55 ‰ + 3,22 ‰ = 13,77 ‰ telle pourrait être la mortalité en Kazakhstan, si la mortalité était pareille dans les deux populations (l'interférence a modéré l' effet négatif de la mortalité sur la variation des taux bruts)

7,42 ‰ + 8,92 ‰ = 16,34 ‰ telle pourrait être la mortalité en Kazakhstan, si les structures de deux populations étaient similaires (l'interférence a renforcé l'effet positif de la structure par âge sur la variation des taux bruts)

Modèle multiplicatif de la décomposition sans interaction

soit $$k = \frac{TBM^B}{TBM^A} = \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}$$

$$k = \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A} = \underbrace{\frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^B}{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}}_{\text{Indice de structure}} \times \underbrace{\frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{\sum_i m_i^A \cdot C_i^B}}_{\text{Indice de niveau (de prix)}} = I_{structure} \times I_{niveau}$$

Indice de structure
valeur attendu en absence de changements des taux

Indice de niveau (de prix)
valeur attendu si les changements de structures sont identiques

Modèle multiplicatif avec l'interaction

Soit l'effet de la structure :

$$I'_{struc} = \frac{\sum_i m_i^A \cdot C_i^B}{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}$$

et

l'effet de changement des taux comme suit:

$$I'_{niv} = \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^A}{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A}$$

on voit que

$$k = \frac{TBM^B}{TBM^A} = \frac{\sum_i m_i^B \cdot C_i^B}{\sum_i m_i^A \cdot C_i^A} \neq I'_{struc} \times I'_{niv}$$

Ajoutons un multiplicateur pour résoudre ce problème

$$k = \frac{TBM^B}{TBM^A} = (I'_{struc} \times I'_{niv}) \times \frac{k}{(I'_{struc} \times I'_{niv})} \rightarrow \text{Interaction}$$

Passage d'un modèle multiplicatif à un modèle additif

Considérons un modèle multiplicatif : $k = I_s \times I_n \Rightarrow$

On sait que

$$\ln k = \ln I_s + \ln I_n \Rightarrow 1 = \frac{\ln I_s}{\ln k} + \frac{\ln I_n}{\ln k}$$

Donc:

$$100\% = \boxed{\left(\frac{\ln I_s}{\ln k}\right) \cdot 100\%} + \boxed{\left(\frac{\ln I_n}{\ln k}\right) \cdot 100\%}$$

Impact en pourcentage amputable au changement de structure

Impact en pourcentage amputable au changement de niveau