Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie

Cours d'analyse démographique (**Master 1e année**) par Alexandre Avdeev,

Chapitre 2

Types des taux et des quotients par âge

- Type des taux et calculs des taux,
- Données nécessaires et leur localisation sur le diagramme de Lexis,
- Comparaison et relations entre les taux de divers types,
- Taux de première et de deuxième catégories,
- Quotients, ou les probabilité d'une événement.

Rappel

1. Taux en démographie

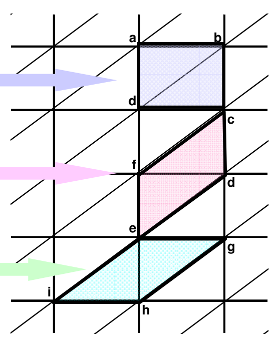
$$\text{Taux} = \frac{\text{Nombre d'occurences}}{\text{Nombre de personnes} - \text{années d'exposition au risque}}$$

2. Trois types de classement des événements démographiques

Type I — (Âge) X (Période)

Type II — (Génération) X (Période)

Type III — (Âge) X (Génération)



Exemple: mortalité

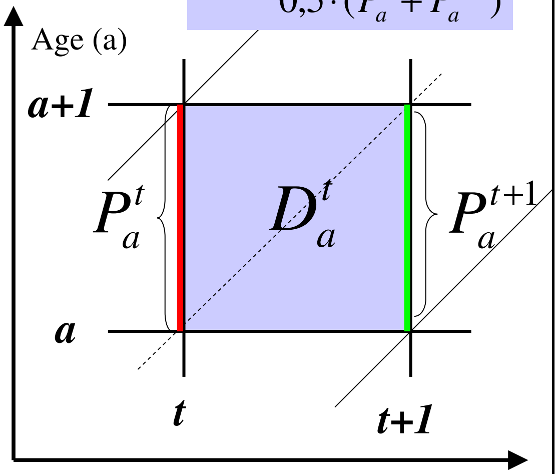
Taux de type I

$$m_a^I = \frac{D_a^t}{0{,}5 \cdot (P_a^t + P_a^{t+1})}$$

D_a^t – nombre de décès à l'âge « ***a*** » révolu (entre âge exact ***a*** et ***a+1***) durant une période « ***t*** » (entre moment ***t*** et ***t+1***)

P_a^t – population à l'âge « ***a*** » révolu (entre âge exact ***a*** et ***a+1***) au moment « ***t*** ».

P_a^{t+1} – population à l'âge « ***a*** » révolu (entre âge exact ***a*** et ***a+1***) au moment « ***t+1*** ».



Ce taux mesure la mortalité moyenne pour une période et dans un intervalle l'âge (pour deux ou plusieurs générations consécutives

Exemple: mortalité

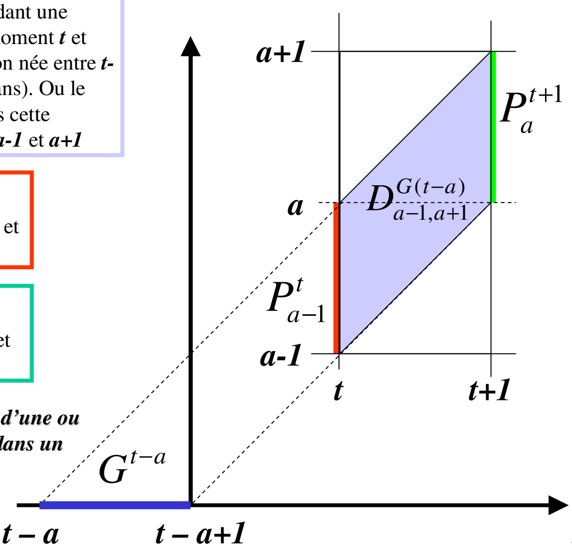
Taux de type II dit « perspectif »

$$m_{G(t-a)}^{II} = \frac{D_{a-1,a+1}^{G(t-a)}}{0{,}5 \cdot (P_{a-1}^t + P_a^{t+1})}$$

$D_{a-1,a+1}^{G(t-a)}$ – nombre de décès pendant une période « ***t*** » (entre moment ***t*** et ***t+1***) dans la génération née entre ***t-a*** et ***t-a+1*** (il a « ***a*** » ans). Ou le nombre de décès dans cette génération entre âge ***a-1*** et ***a+1***

P_{a-1}^t – population à l'âge « ***a-1*** » révolu (entre âge exact ***a-1*** et ***a***) au moment « ***t*** ».

P_a^{t+1} – population à l'âge « ***a*** » révolu (entre âge exact ***a*** et ***a+1***) au moment « ***t+1*** ».



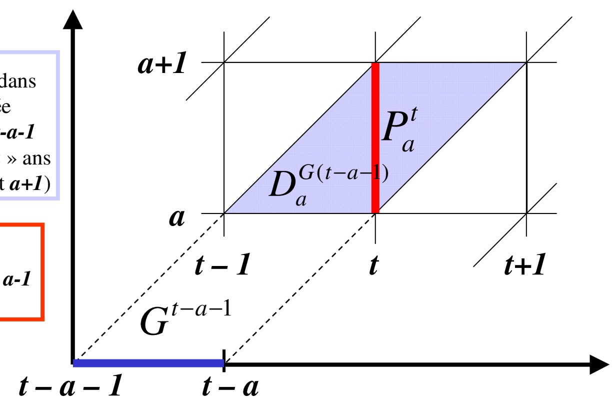
Ce taux mesure la mortalité moyenne d'une ou plusieurs générations consécutives dans un intervalle de temps

Exemple: mortalité

Taux de type III → $m_a^{III} = \dfrac{D_a^{G(t-a-1)}}{P_a^t}$

$D_a^{G(t-a-1)}$ – nombre de décès dans une génération née entre le moment ***t-a-1*** et ***t+a***) à l'âge « ***a*** » ans révolus (entre ***a*** et ***a+1***)

P_a^t – population à l'âge « ***a*** » révolu (entre âge exact ***a-1*** et ***a***) au moment « ***t*** ».



Ce taux mesure la mortalité moyenne d'une ou plusieurs générations consécutives dans un intervalle d'âge

Données nécessaires:

Effectifs de la population à la fin d'une période (projection)

Taux de type I → **Décès durant une période entre t et t+i classés par âge révolu** + **Population par âge révolu au début et à la fin d'une période**

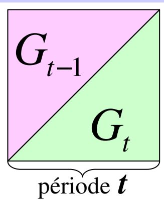
Taux de type II dit « perspectif » → **Décès durant une période entre *t* et *t+i* classés par années de naissance (et par âge) des décédés** + **Population par âge révolu au début et à la fin d'une période**

Taux de type III → **Décès durant une période entre *t – i* et *t+i* classés par années de naissance (et par âge) des décédés** + **Population par âge révolu au milieu d'une période**

Double classement des décès: par âge et par générations

Relations entre les taux de diverses catégories

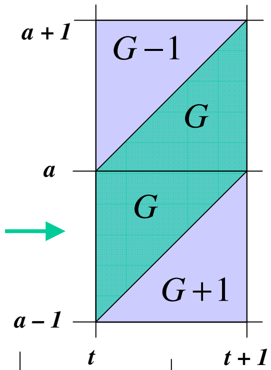
Le double classement des événements (par âge et par génération) permet de passer facilement d'un type de taux à l'autre.



Type I ⇒ Type II

$$m^{II}_{G(t-a)} = \alpha \cdot m^{I}_{a-1} + \beta \cdot m^{I}_{a}$$

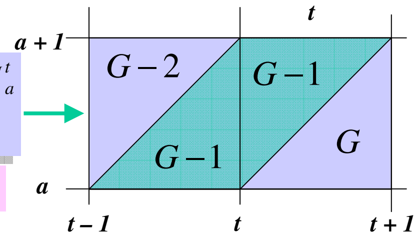
$$(\alpha + \beta = 1)$$



Type I ⇒ Type III

$$m^{III}_{G(t-a-1)} = \alpha \cdot m^{I^{t-1}}_{a} + \beta \cdot m^{I^{t}}_{a}$$

$$(\alpha + \beta = 1)$$



Hypothèse de l'uniformité:

$$\alpha = \beta = 0{,}5$$

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

7

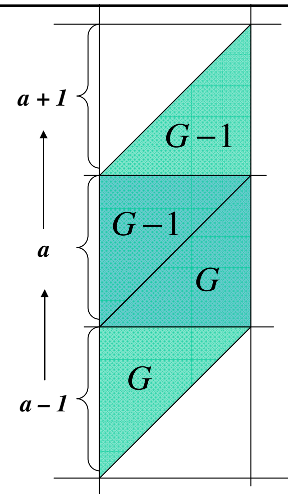
Relations entre les taux de diverses catégories (suite)

Type II ⇒ Type I

$$m^{I}_{a} = \alpha \cdot m^{II}_{a} + \beta \cdot m^{II}_{a+1}$$

ou

a – l'âge atteint dans l'année

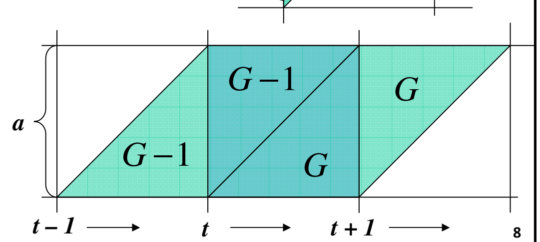


Type III ⇒ Type I

$$m^{I^{t}}_{a} = \alpha \cdot m^{III^{t}}_{a} + \beta \cdot m^{III^{t+1}}_{a}$$

ou

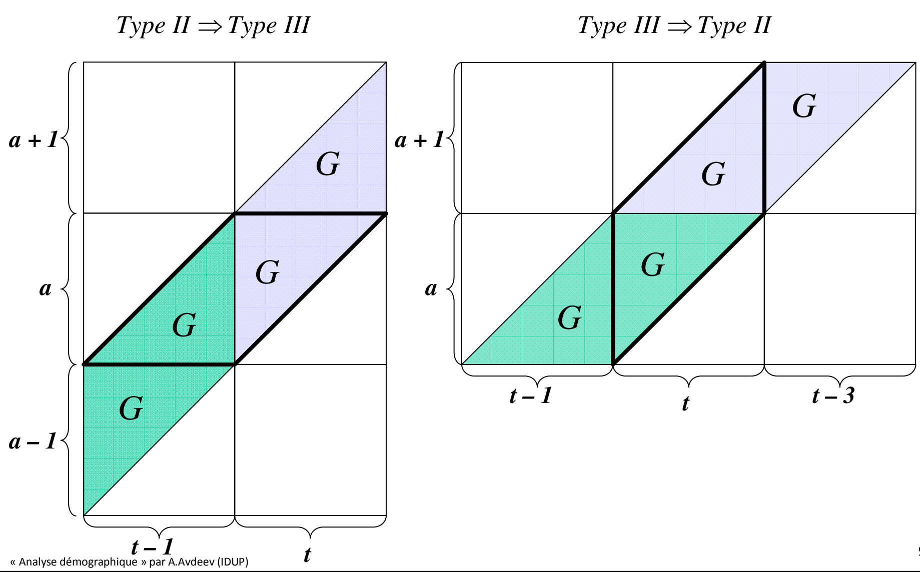
a – l'âge révolu



« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

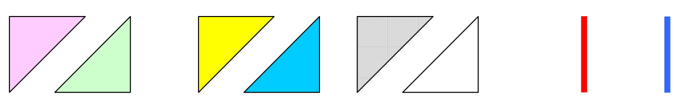
8

Relations entre les taux de diverses catégories (suite)



« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 9

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux.



Age	1993 G-1	1993 G	1994 G-1	1994 G	1995 G-1	1995 G	Population (1.1.xx) 1994	Population (1.1.xx) 1995
69	3081	3300	3184	3205	3197	3279	224448	231630
70	3321	3600	3208	3240	3291	3457	219548	218205
71	3557	3619	3344	3498	3349	3425	213348	212922
72	3961	3801	3648	3719	3596	3613	213184	206391
73	2858	4183	4142	3878	3954	3925	210506	205693
74	2386	2318	2889	4275	4084	4280	***121312***	202140
75	2118	2393	2417	2275	3095	4646	***100716***	116196
76	2058	2163	2238	2438	2456	2376	***84490***	95863
77	2222	2259	2005	2137	2235	2667	***74641***	80091
78	4030	3326	2326	2242	2238	2376	***87657***	70442
79	4305	4294	4108	3249	2322	2345	***120679***	82035
80	4492	4560	4325	4171	4321	3444	113403	112397
81	4256	4738	4465	4400	4313	4308	104048	104663

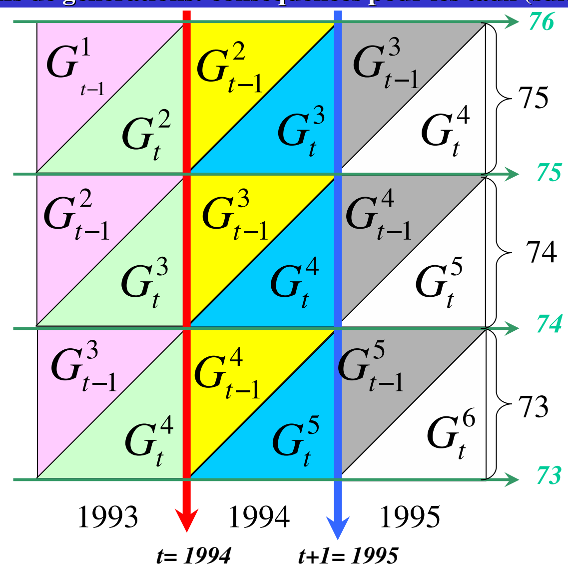
Exemple de : Caselli G. et J.Vallin « Du repérage des événements dans le temps au diagramme de Lexis et au calculs des taux » Dans: Caselli G., J.Vallin et G.Wunsch *Démographie. Analyse et synthèse*. Vol.I « La dynamique des populations ». INED, Paris, 2001, p.102-109

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 10

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

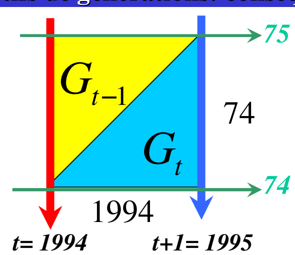
G-1	G	Age
1924	1925	69
1923	1924	70
1922	1923	71
1921	1922	72
1920	1921	73
1919	1920	74
1918	**1919**	**75**
1917	1918	76
1916	1917	77
1915	1916	78
1914	1915	79
1913	1914	80
1912	1913	81

G=1994 – âge



Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

Type I:
année. . . 1994
âge. 74



G = 1994 – 74 = 1920

G-1 = 1920 – 1 = 1919

$$m^I_{74} = \frac{(D^{1994}_{G-1} + D^{1994}_{G})}{0,5\cdot(P^{1994}_{74} + P^{1995}_{74})} = \frac{2\times(2889+4275)}{(121312+202140)} = 0,04430$$

Age	1993		1994		1995		Population	
	G-1	G	G-1	G	G-1	G	1994	1995
74	2386	2318	*2889*	*4275*	4084	4280	*121312*	*202140*
75	2118	2393	2417	2275	3095	4646	100716	116196
76	2058	2163	2238	2438	2456	2376	84490	95863
77	2222	2259	2005	2137	2235	2667	74641	80091

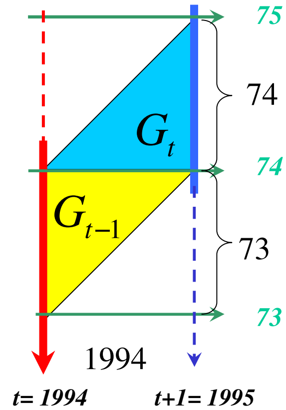
Source: « Traité » Vol. I, Ch.6. p.104

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

Type II:
Année. 1994
Génération…1920

$$m_{G1920}^{II1994} = \frac{(D_{73}^{94,G-1} + D_{74}^{94,G})}{0{,}5 \cdot (P_{73}^{1994} + P_{74}^{1995})} =$$

$$= \frac{2 \times (4142 + 4275)}{(210506 + 202140)} = 0{,}04080$$



Age	1993		1994		Population	
	G-1	G	G-1	G	1994	1995
72	3961	3801	3648	3719	213184	206391
73	2858	4183	***4142***	3878	***210506***	205693
74	2386	2318	2889	***4275***	121312	***202140***
75	2118	2393	2417	2275	100716	116196

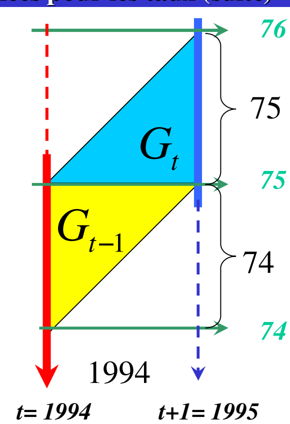
« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 13

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

Type II:
Année. 1994
Génération…1919

$$m_{G1919}^{II1994} = \frac{(D_{74}^{94,G-1} + D_{75}^{94,G})}{0{,}5 \cdot (P_{74}^{1994} + P_{75}^{1995})} =$$

$$= \frac{2 \times (2889 + 2275)}{(121312 + 116196)} = 0{,}04348$$

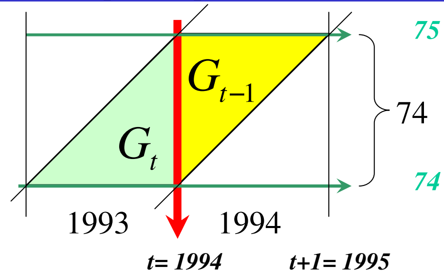


Age	1993		1994		Population	
	G-1	G	G-1	G	1994	1995
72	3961	3801	3648	3719	213184	206391
73	2858	4183	4142	3878	210506	205693
74	2386	2318	***2889***	4275	***121312***	202140
75	2118	2393	2417	***2275***	100716	***116196***

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 14

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

Type III:
Année. 1993-94
Génération…1919



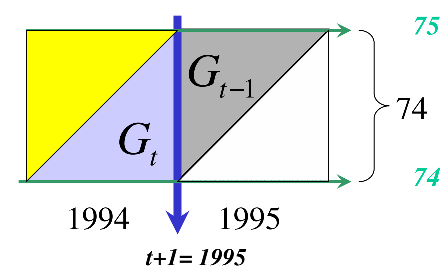
$$m_{74}^{III\ G-1919} = \frac{(D_{74}^{1993G} + D_{74}^{1994G})}{P_{74}^{1994}} = \frac{2318 + 2889}{121312} = 0{,}04292$$

Age	1993		1994		Population	
	G-1	G	G-1	G	1994	1995
72	3961	3801	3648	3719	213184	206391
73	2858	4183	4142	3878	210506	205693
74	2386	***2318***	***2889***	4275	***121312***	202140
75	2118	2393	2417	2275	100716	116196

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 15

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

Type III:
Année. 1994-95
Génération…1920



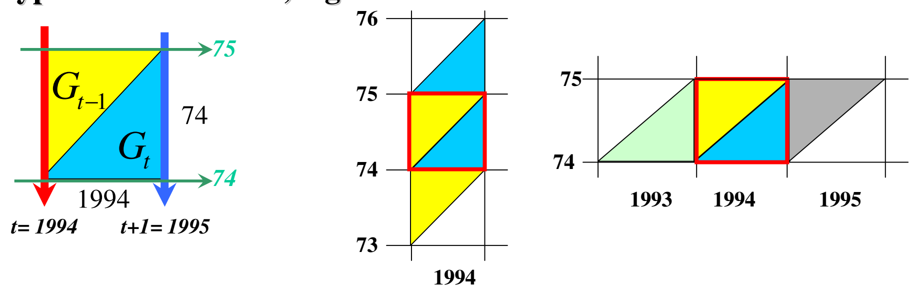
$$m_{74}^{III\ G-1920} = \frac{(D_{74}^{1994G} + D_{74}^{1995G-1})}{P_{74}^{1995}} = \frac{4275 + 4084}{202140} = 0{,}04135$$

Age	1993		1994		1995		Population	
	G-1	G	G-1	G	G-1	G	1994	1995
74	2386	2318	2889	***4275***	***4084***	4280	121312	***202140***
75	2118	2393	2417	2275	3095	4646	100716	116196
76	2058	2163	2238	2438	2456	2376	84490	95863
77	2222	2259	2005	2137	2235	2667	74641	80091

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 16

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

Type I: année = 1994; âge = 74



$$m_{74}^{I} = \frac{(D_{G-1}^{1994} + D_{G}^{1994})}{0{,}5 \cdot (P_{74}^{1994} + P_{74}^{1995})} = $$
$$= 0{,}04430$$

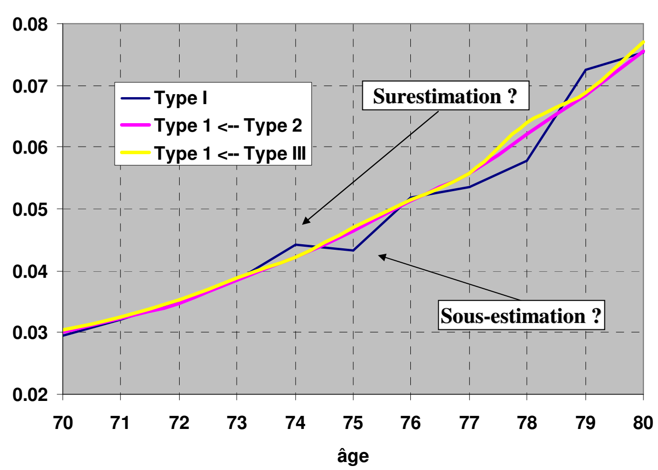
$$m_{74}^{I(1994)} = \frac{m_{G1920}^{II1994} + m_{G1919}^{II1994}}{2} = $$
$$= \frac{0{,}04080 + 0{,}04348}{2} = $$
$$= 0{,}04214$$

$$m_{74}^{I(1994)} = \frac{m_{74}^{III93-94} + m_{G74}^{II94-95}}{2} = $$
$$= \frac{0{,}04292 + 0{,}04135}{2} = $$
$$= 0{,}04214$$

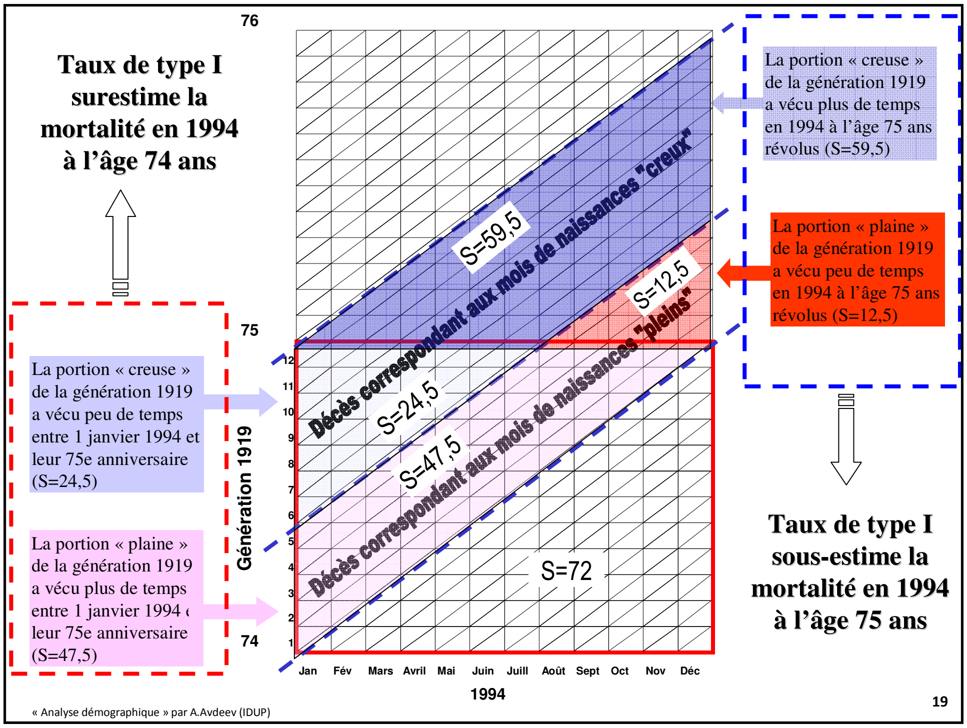
« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 17

Variation des effectifs de générations: conséquences pour les taux (suite).

Comparaison des taux de type I



« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 18



Taux de première et de seconde catégories

Taux de première catégorie = Les taux par durée de l'exposition au risque

Exemple: taux de fécondité par âge et rang de naissance obtenu en divisant le nombre de naissance de rang donné par le nombre d'années vécues dans un intervalle d'âge par ceux qui n'ont pas d'enfant de ce rang

Taux de seconde catégorie = Les événements réduits pour la population soumise et non soumise au risque

Exemple: taux de fécondité par âge et rang de naissance obtenu en divisant le nombre de naissance de rang donné par la totalité des années vécues dans un intervalle d'âge

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP)

20

1. Quotient ou la probabilité d'un événement pour une personne appartenants à une catégorie

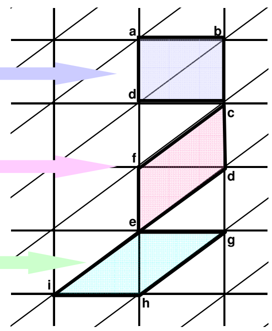
$$ {}_{N}Q_{X} = \frac{\text{Nombre d'occurences à l'âge X}}{\text{Population soumise au risque au début d'une période N}} $$

2. Trois types de classement des événements démographiques

Type I — (Âge) X (Période)

Type II — (Génération) X (Période)

Type III — (Âge) X (Génération)



« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 21

Quotient à l'âge atteint dans l'année ou « perspectif »

$$ q_x^{G(t-x)} = \frac{D_{x-1,x+1}^{G(t-x)}}{P_{x-1}^{t}} $$

Ce quotient mesure la probabilité de mourir durant un intervalle de temps (une année, e.g.) pour une génération (i.e. avant et après X[e] anniversaire)

$D_{x-1,x+1}^{G(t-x)}$ – nombre de décès pendant une période « ***t*** » (entre moment ***t*** et ***t+1***) dans la génération née entre ***t-x*** et ***t-x+1*** (il a « ***x*** » ans). Ou le nombre de décès dans cette génération entre âge ***x-1*** et ***x+1***

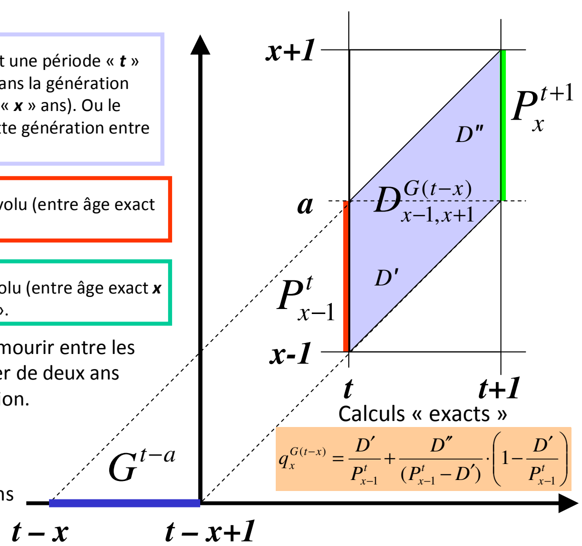
P_{x-1}^{t} – population à l'âge « ***x-1*** » révolu (entre âge exact ***x-1*** et ***a***) au moment « ***t*** ».

P_{x}^{t+1} – population à l'âge « ***x*** » révolu (entre âge exact ***x*** et ***x+1***) au moment « ***t+1*** ».

On parle aussi de la probabilité de mourir entre les deux date (le 1 janvier et le 1 janvier de deux ans consécutifs, e.g.) pour une génération.

Ainsi $p_x^{G(t-x)} = 1 - q_x^{G(t-x)}$

la probabilité de survivre durant une période, on utilise dans les projections (prévisions) démographiques



Calculs « exacts »

$$ q_x^{G(t-x)} = \frac{D'}{P_{x-1}^{t}} + \frac{D''}{(P_{x-1}^{t} - D')} \cdot \left(1 - \frac{D'}{P_{x-1}^{t}}\right) $$

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 22

Quotient pour une génération

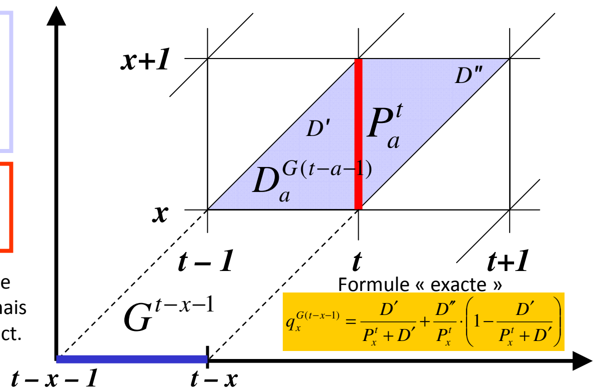
$$q_x^{G(t-x-1)} = \frac{D_x^{G(t-x-1)}}{P_x^t + 0{,}5 \cdot D_x^{G(t-x-1)}}$$

Ce quotient mesure la probabilité d'un événement (e.g. un décès) pour une génération durant un intervalle d'âge

$D_x^{G(t-x-1)}$ – nombre de décès dans une génération née entre le moment ***t-x-1*** et ***t+x***) à l'âge « ***x*** » ans révolus (entre ***x*** et ***x+1***)

P_x^t – population à l'âge « ***x*** » révolu (entre âge exact ***x-1*** et ***x***) au moment « ***t*** ».

Puisque la statistique des anniversaire n'existe nulle part, on ne dispose jamais de l'effectif de population à l'âge exact. Il est nécessaire donc de l'estimer.



Formule « exacte »

$$q_x^{G(t-x-1)} = \frac{D'}{P_x^t + D'} + \frac{D''}{P_x^t} \cdot \left(1 - \frac{D'}{P_x^t + D'}\right)$$

Cette estimation pourrait se faire à partir d'une hypothèse que les décès sont distribués uniformément dans l'intervalle d'âge (D'=D" → hypothèse d'uniformité). Une telle hypothèse n'est acceptable que ci les intervalles sont suffisamment courts. Sinon il faudra recourir aux hypothèses plus complexes (e.g. normalité de risque etc.), ou appliquer une formule « exacte », si les décès sont classés par génération et par âge (double classement)

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 23

Une probabilité de mourir dans un intervalle d'âge durant une période de calendrier

Si nous supposons que la probabilité de mourir dans un triangle élémentaire ne change pas beaucoup durant deux années successives (***hypothèse de stationnarité***), on pourra donc en déduire que :

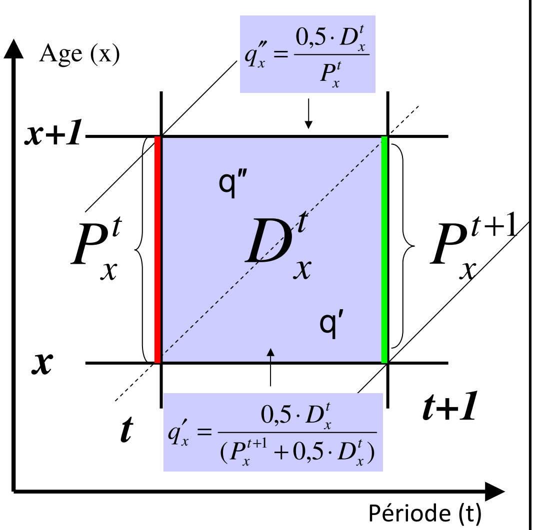
$$q_x = q'_x + q''_x - q'_x \cdot q''_x$$

On voit par ailleurs que sous cette hypothèse :

q' ≈ ½ du quotient (de mortalité) de la génération P_x^t à l'âge *x* ou
≈ ½ du quotient (de mortalité) de la génération P_x^t pour l'année *t* ;
et
q" ≈ ½ du quotient (de mortalité) de la génération P_x^{t+1} pour l'année *t ;*

Sachant que la valeur du produit (q' x q") est très faible, on peut le négliger et accepter la formule suivante :

$$q_x = q'_x + q''_x$$



$$q''_x = \frac{0{,}5 \cdot D_x^t}{P_x^t}$$

$$q'_x = \frac{0{,}5 \cdot D_x^t}{(P_x^{t+1} + 0{,}5 \cdot D_x^t)}$$

On recourt à des quotients de ce type (âge-période), si on s'intéresse à des situations très particulières (e.g. la mortalité infantile)

« Analyse démographique » par A.Avdeev (IDUP) 24