Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie

Cours d'analyse démographique niveau : **Master de démographie** par Alexandre Avdeev,

Chapitre 11

Modèles de croissance et de la structure de population par âge

- Modèles de croissance
  - un aperçue historique de la notion de population
  - une idée générale : population est une fonction mathématique ;
  - la croissance exponentielle comme une loi générale de croissances démographique ;
  - limites de croissance et une idée de la croissance logistique
- Modèles de structures
  - la table de mortalité comme un modèle d'une population stationnaire (idéal des utopistes)
  - population stable comme un modèle général d'évolution de la structure par âge

Lecture :

Jean Bourgeois-Pichat – *La dynamique des populations: populations stables, semi-stables et quasi-stables*. Cahier de l'INED "Travaux et documents" n°133, Paris, PUF, 1994, 311 p.

Samuel H. Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot – *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*. Blackwell Publishing, 2000, p138-190

Henry Leridon et Laurent Toulemon, *Démographie. – Approche statistique et dynamique des populations*. Economica, Paris, 1997, p.32-74

Léon Tabah "Relationships between age structure, fertility, mortality and migration. Population replacement and renewal". United Nations World Population Conference. Beograd, 1965. Background paper B.7/15/E/476

I. Modèles de croissance

Aperçu historique (rappel) :

population comme un nombre ou une fonction

L'apparition du mot et de la notion « population »

1612 – invention du mot « population » par Sir **Francis Bacon (22.01.1561–09.04.1626).**
Dans ***« Essays, Civil and Moral »*** 2e édition (avec 38 essais), **1612**, Essai XV : « Of sediction and troubles » [« Sur séduction (tentation) et troubles »] :

"Generally, it is to be foreseen that ***the population*** *of a kingdom (especially if it be not mown down by wars) do not exceed the stock of the kingdom which should maintain them.* Neither is the population to be reckoned only by number; for a smaller number that spend more and earn less do wear out an estate sooner than a greater number that live lower and gather more. Therefore the multiplying of nobility and other degrees of quality in an over proportion to the common people doth speedily bring a state to necessity; and so doth likewise an overgrown clergy; for they bring nothing to the stock; and in like manner, when more are bred scholars than preferments can take off." ➔

« Généralement on doit veiller que ***la population*** d'un Royaume*, (spécialement si elle n'est pas fauchée par les guerres) n'excède pas les ressources du royaume nécessaires à leur entretien ».*

Cependant, dans les premières éditions françaises ce mot a été traduit en *peuple* ou *monde.*

Les contemporains de F.Bacon: *Galileo Galilei* (1564-1642), Italie, *René Descartes* (1596-1650), France

La stabilité est une règle, la croissance est une anomalie

Dans l'Antiquité: un nombre est une quantité fixe

Platon (428-348 av.J.-C.) dans *La République* et *Les Lois* imagine une population stationnaire (5040 famille, ~20 000 citoyens libres) et une politique qui maintient cette stationnarité

Les même idées sont retenues et développées par :

- *Aristote (384-322 av.J.-C.), La Politique*
- *Sir Thomas More (1478-1535)*
  Utopia, 1518, Londres (en latin), traduction française en 1550 à Paris: *l'Utopie ou le traité de la meilleure forme de gouvernement*
- *Tommaso Campanella* (1568-1639)
  Civitas solis, 1623, Francfort, (appendice à la Philosophia realis). Traduction française en 1841

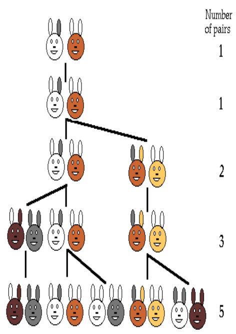
Gravure de Ambrosius Holbein pour une édition de 1518.
Dans le coin en bas à gauche le voyageur Raphael Hythlodaeus décrivant l'île.

Croissance comme une propriété intrinsèque de la population

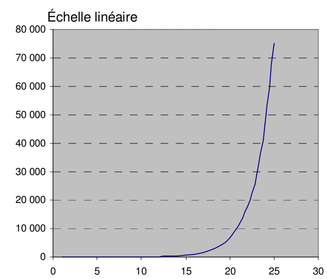
Problème de Fibonacci (XIII s.) : multiplication des lapins

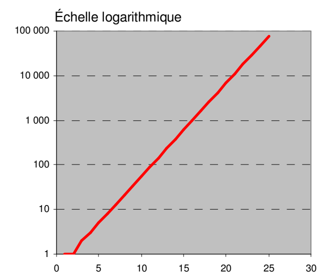
Leonardo Pisano, Fibonacci (*en italien : Figlio Buono Nato Ci*) ~1170 – ~1250 : ***Liber abaci***, (Livre des calculs) rédigé en 1202, on ne dispose qu'une édition de 1228…

La croissance de lapins (des arbres) :
« Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on ***dans douze mois***, si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ? » ***Réponse : 144 couples***
1, 1, (1+1=2), (1+2=3), (2+3=5), …. = 1,1,2,3,5,8,13,21, etc… ($n_i = n_{i-1} + n_{i-2}$, $i>2$)

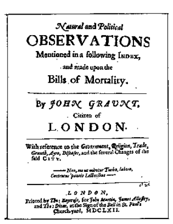


La croissance de lapins durant 25 mois (75 025 couples)



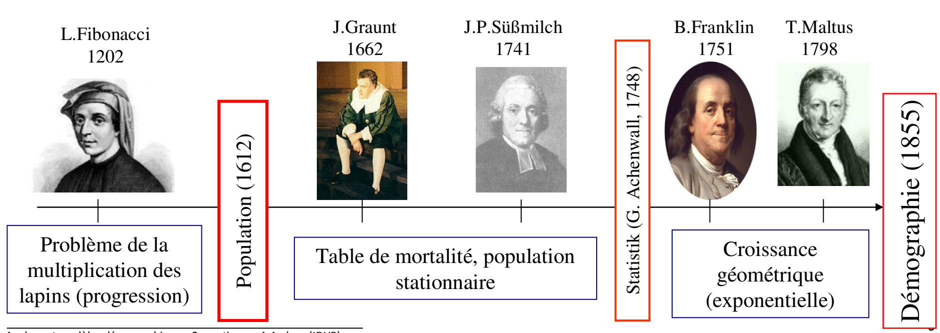


Les lois de la population ou « l'ordre divin »


Natural and Political OBSERVATIONS Mentioned in a following Index, and made upon the Bills of Mortality. By JOHN GRAUNT, Citizen of LONDON.

John Graunt (24.04.1620 – 18.04.1674) *"Natural and political observations. Mentioned in a following Index and made upon the Bills of Mortality"*, 1662. ➔ origine de la science de démographie : espérance de vie à Londres était 27 years, avec 65% de décès avant l'âge de 16 ans (*il ne connaît pas le mot "population"*)

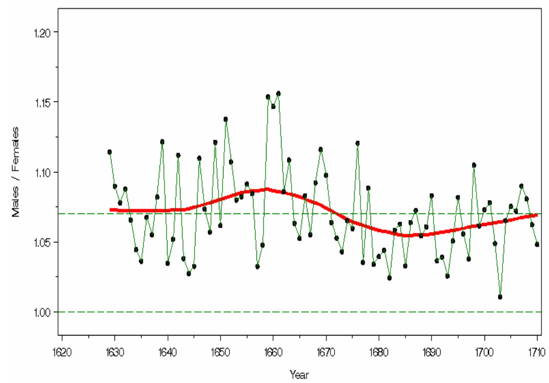
Johann Peter Süssmilch (03.09.1707-22.03.1767) «***Die göttliche Ordnung*** in den Veranderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, Tod und Fortpflanzung des selben erwiesen... » , 1741 Berlin, (L'Ordre divin dans les changements du genre humain, prouvé par la naissance, la mort et la propagation de l'espèce...),



Rapport des sexes: une découverte de première importance

1711 - John Arbuthnot (1667-1735), Ecosse.

Il a réalisé le premier test statistique de signification (la différence entre les observations et une hypothèse « nulle ») pour démontre « the ***guiding hand of a devine »*** qui maintenait une rapport des sexe à la naissance presque constant à Londres en 1629-1710



Cette priorité est cependant contestée au profit de J.P.Süssmich, auteur de « L'ordre divine… » paru 40 ans après:

«Le pasteur Süssmilch a été le premier à tenter de traiter systématiquement la question du taux de masculinité, et il a introduit à ce sujet le constat que «pour 1000 fillettes nées, il vient 1050 garçons», une formule promise au succès parmi les démographes malgré ses problèmes évidents»

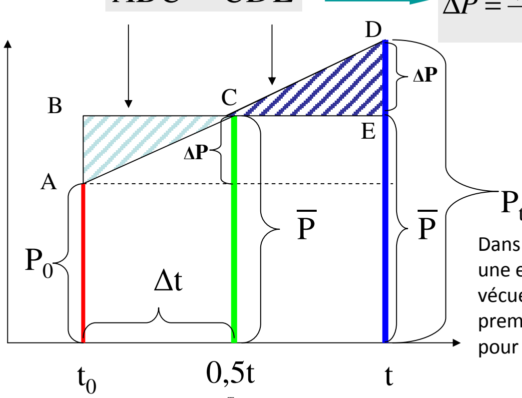
Source: Wikipeadia avec une référence à « Le sexisme de la première heure. Hasard et sociologie », Éric Brian et Marie Jaisson, *Raisons d'agir*, 2007, page 22

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP) 7

Modèle de croissance linéaire

$$P_\tau = P_0 + \Delta P \cdot \tau$$ τ – durée d'une période

$$ABC = CDE \rightarrow \Delta P = \frac{(P_0 - P_t)}{t} \rightarrow \Delta P \cdot t = P_0 - P_t$$



$$\bar{P}_{0,t} = \frac{P_0 + P_t}{2}$$

Dans ce modèle la « population moyenne » est une estimation correcte de nombre d'années vécues puisque la surestimation pour la première moitié est égale à la sous estimation pour la deuxième. ABC=CDE

$$\bar{P}_{0,t} = \frac{\sum_{t=0}^{T} P_t}{T} \rightarrow \bar{P} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t P(t)dt$$

$$\bar{x} \cdot n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP) 8

Exemple 1: **Croissance de la population en progression arithmétique**

Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement	Accroissement
t	P_t	$P_{t,t+1}$	$r = (P_{t+1} - P_t)/P_{t,t+1}$	$\Delta P = (P_{t,t+1}) \times r$
0	100	120	0,3333	40
1	140	160	0,2500	40
2	180	200	0,2000	40
3	220	240	0,1667	40
4	260			
Total	*900*	*720*	*0,9500*	*160*
Moyenne sur 5(4)	180	180	0,2375	
Moyenne chronologique	180			
Moyenne sur extrémités	180		0,2500	
Moyenne géométrique			0,2295	

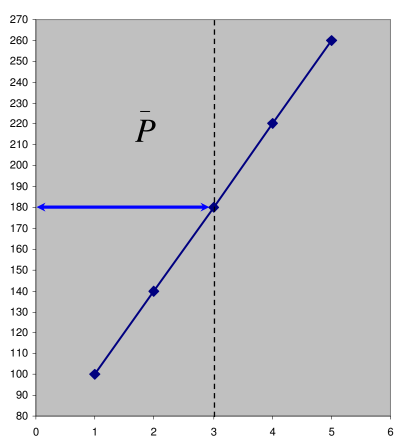
$$\bar{P}_5 = \frac{900}{5} = 180 \qquad \bar{P}_4 = \frac{720}{4} = 180 \qquad \bar{P}_{ch} = \frac{0,5 \cdot (100 + 260) + 540}{4} = 180$$

$$\Delta P_{0,T} = 260 - 100 = 160 \qquad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 160$$

Exemple 1 Présentation graphique

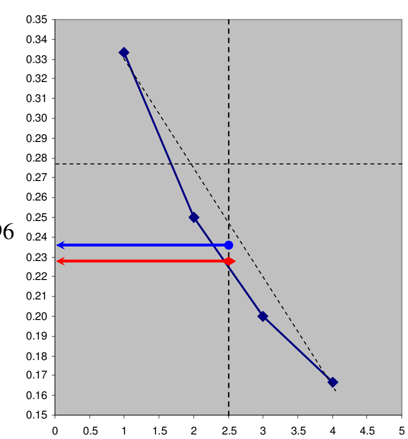
Population ➔ progression arithmétique **: Taux d'accroissement** ➔ progression géométrique

Croissance de la population **Taux de croissance**



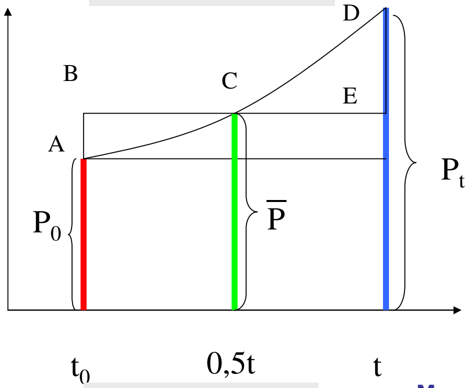
$\bar{r}_a = 0,238$

$\bar{r}_g = 0,2296$



Populations « malthusiennes » : croissance non linéaire

$$ABC \neq CDE$$



$$P_t = P_0 \cdot \left(\frac{P_\tau}{P_0}\right)^{\frac{t}{\tau}} \quad \text{où}$$

$$\left(\frac{P_\tau}{P_0}\right)^{\frac{1}{\tau}} = (1+r);$$

r – taux d'accroissement pendant la période $[0,\tau]$

$$\bar{P}_{0,T} = \sqrt[t]{\prod_{t=0}^{T} P_t}$$

Moyenne géométrique

$$\ln \bar{P}_{0,T} = \frac{\sum_{t=0}^{T} \ln P_t}{T}$$

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP) 11

Exemple 2: Croissance d'une population « malthusiennes » : une progression géométrique

Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement	Accroissement
t	P_t	$P_{t,t+1}$	r = (Pt+1 -- Pt)/Pt,t+1	ΔP = (Pt,t+1) x r
0	100	115	0,2609	30
1	130	149,5	0,2609	39
2	169	194,4	0,2609	50,7
3	219,7	252,7	0,2609	65,91
4	285,6			
Total	*904,31*	*711,5*	*1,0435*	*185,61*
Moyenne sur 5(4)	180,9	177,88	0.2609	
Moyenne chronologique	177,9			
Moyenne sur extrémités	192,8	183,83		
Moyenne géométrique	169,0		0.2609	

$$\bar{P}_5 = \frac{904,34}{5} = 180,9 \qquad \bar{P}_4 = \frac{711,5}{4} = 177,88 \qquad \bar{P}_{ch} = \frac{0,5\cdot(100+285,6)+518,7}{4} = 177,8$$

$$\Delta P_{0,T} = 285,6 - 100 = 185,61 \qquad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 185,61$$

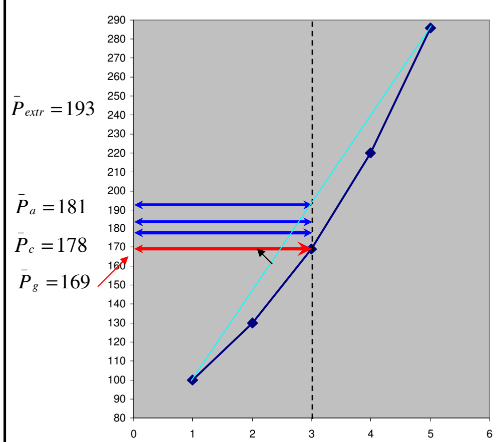
$$\bar{P}_g = \sqrt[T]{\prod_t P_t} = 169 \qquad \bar{P}_g = \exp\left(\frac{\sum_{t=0}^{T} \ln(P_t)}{T}\right) = 169$$

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP) 12

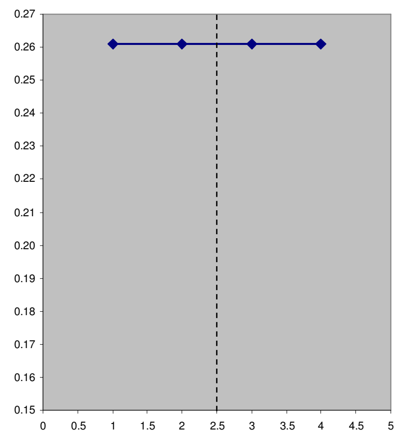
Exemple 2 Présentation graphique

Population ➔ progression géométrique : **Taux d'accroissement** ➔ constant
« population malthusienne »

Croissance de la population



Taux de croissance



Mesurer la croissance d'une population : approche générale

1. Modèle avec le temps discret : Soit ***P(t)*** – effectif d'une population au moment ***t***, alors

$$P(t) = k \cdot P(t-1)$$

où ***k*** – taux de croissance,
si ***k* >1** → la population croît,
si ***k* = 1** → la population ne change pas, et
si ***k* < 1** la population diminue

Soit ***P(0)*** – effectif initial d'une population au moment ***t=0***, alors dans ***t*** quantités de temps on aura:

$$P(t) = k \cdot k \cdot k \cdot ... \cdot k \cdot P(0) = P(t) = k^t \cdot P(0) \quad (1)$$

2. Modèle avec le temps continu : $\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r$

si ***r*** > 0 → la population s'accroit,
si ***r*** = 0 → la population ne change pas, et
si ***r*** < 0 la population diminue

En intégrant par ***t*** on obtient : $P(t) = e^{rt} \cdot P(0)$ (2)

sachant que ***r = b – d***
b – les naissances normalisées (standardisées) pour une unité de la population (natalité)
d – les décès normalisés (standardisés) pour une unité de la population (mortalité)

<u>La croissance d'une population dépend du rapport entre la natalité et la mortalité</u>

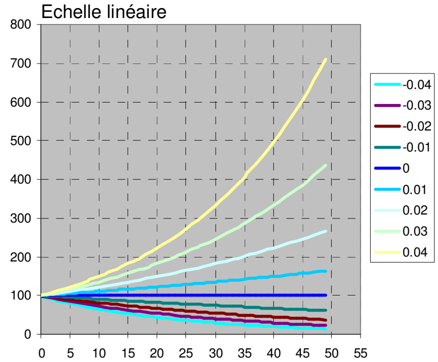
On voit que l'équation *(1)* et l'équation *(2)* sont identiques, alors *k=e^r^*, ou *k=exp(r)* (3)

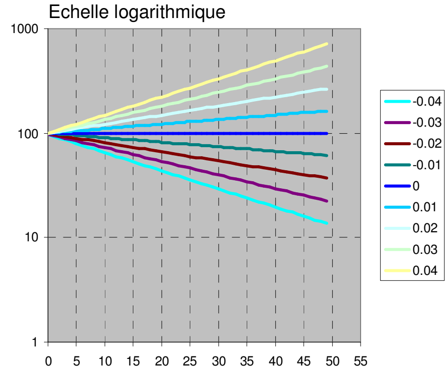
Cependant, cela (3) ne signifie pas que les deux modèles de croissances sont équivalents : population exponentielle croît plus vite, si r > 0 ; et elle décroît moins vite, si r < 0, que la population « géométrique » (modèle multiplicatif ou puissance)

temps écoulé	r = 0.005 exponentielle	k = 1.005 puissance	r = – 0.005 exponentielle	k = – 1.005 puissance
0	100 000	100 000	100 000	100 000
10	105 127	105 114	96 079	96 069
50	128 403	128 323	77 880	77 831
100	164 872	164 667	60 653	60 577
150	211 700	211 305	47 237	47 148

Exercice : **vérifiez cette propriété**

Illustration: modèle de croissance avec le taux de accroissement constant





Période de doublement de l'effectif

$$Si \quad P(t) = 2P(0) \Rightarrow 2 = e^{rt}$$

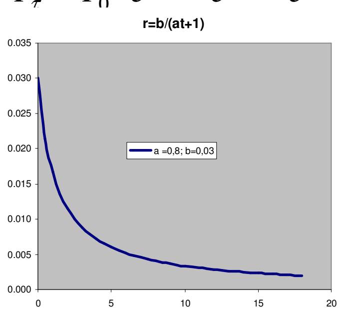
$$t = \frac{\ln 2}{r} \qquad t = \frac{0.693}{r}$$

Modèle de croissance avec le taux de accroissement variable

Model de la population exponentielle avec le taux accroissement constant présente les populations qui n'ont pas de limites de la croissance. Cela n'est pas réaliste.

L'hypothèse: le taux de accroissement change dans le temps.

$$P_\tau = P_0 \cdot e^{r_0\cdot\Delta t}\cdot e^{r_1\cdot\Delta t}\cdot e^{r_2\cdot\Delta t}\ldots = P_0\cdot e^{r_0\cdot\Delta t + r_1\cdot\Delta t + \Delta t + \ldots}$$



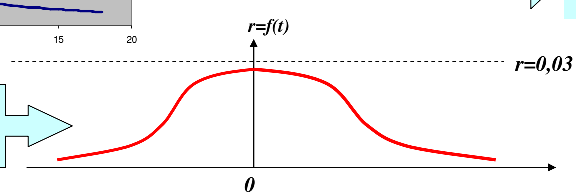
puisque $\Delta t \to 0$

$$P_\tau = P(0)\cdot e^{\int_0^\tau r(t)dt}$$

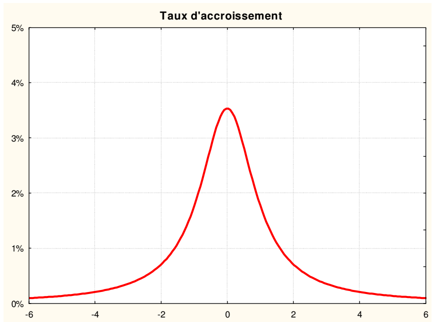
r ➔ peut être déterminé avec une fonction analytique ***r = f(t)***

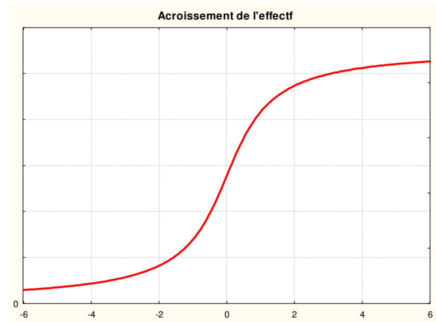
Table de mortalité

Transition démographique



Les limites d'accroissement : un modèle de la transition démographique





A la recherche des limites pour la croissance : un modèle logistique…

<u>**A. Quételet**</u>, 1835 *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale.* Paris, 1835, t.I et II

la résistance ou la sommes des obstacles pour la croissance est égale au carré de vitesse de la croissance de population…

<u>**Pierre-François Verhulste**</u> (1804-1849): « Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. » Dans: *Correspondance mathématique et physique publiée par A.Quételet.* Vol.XVIII, Bruxelles, 1847

$$dP(t) = [r \cdot P(t) - k \cdot P^2(t)]\, dt$$

<u>La solution de cette équation donne :</u>

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{\alpha - r \cdot t}} \quad \text{où}$$

K est la limite de croissance :

$$K = \frac{r}{k} \Rightarrow \lim_{t \to \infty} P(t)$$

$\boldsymbol{\alpha}$- paramètre déterminé par l'écart initial entre la P(0) et K

si $\boldsymbol{\alpha}$=0 → P(0)≈0,5K

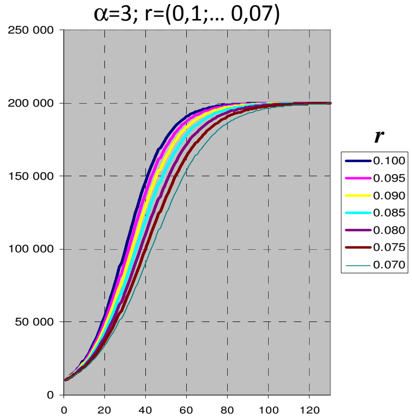
Modèle logistique

$$P(t) = \frac{K}{1+e^{\alpha - r \cdot t}}$$

K=200 000

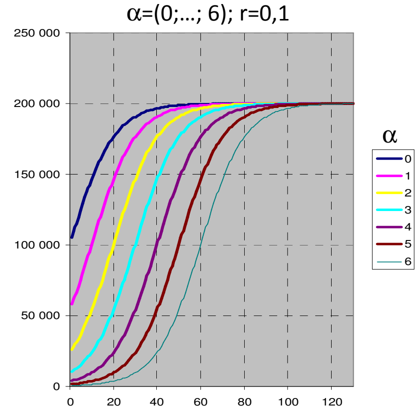
1. Les effectifs initiaux et finaux sont égaux, et les taux d'accroissement sont variables

α=3; r=(0,1;… 0,07)



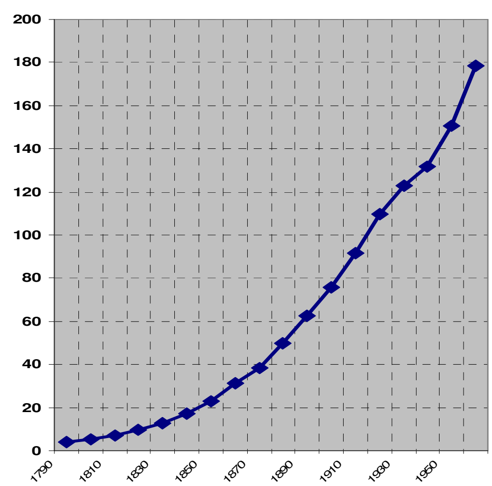
2. Les effectifs initiaux sont différent, mais les effectifs finaux sont égaux et le taux d'accroissement est constant

α=(0;…; 6); r=0,1



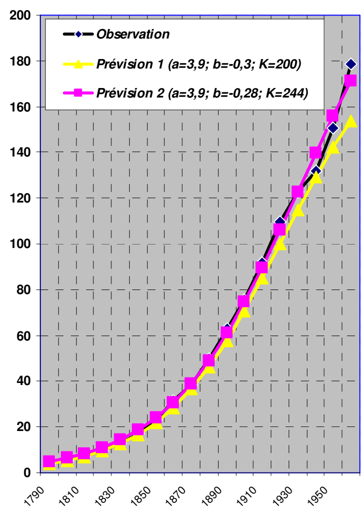
Application du modèle logistique : la croissance de la population des États-Unis depuis 1790

Année	Population	Décennie
1790	3.895	0
1800	5.267	1
1810	7.182	2
1820	9.566	3
1830	12.834	4
1840	16.985	5
1850	23.069	6
1860	31.278	7
1870	38.416	8
1880	49.924	9
1890	62.692	10
1900	75.734	11
1910	91.812	12
1920	109.806	13
1930	122.755	14
1940	131.669	15
1950	150.697	16
1960	178.464	17



Source: **A.Bühl, P.Zöfel** – *SPSS Version 10. Einführung in die modern Dateanalyse unter Windows*. Addison-Wesley, 2001, (Kapitel 16)

Croissance de la population des États Unis (application du modèle logistique)



$$P(t) = \frac{K}{1+e^{a+b\cdot t}}$$

1. Estimation initiale des paramètres

Si t=0 et P(0) = 3,895

$$3{,}895 = \frac{200}{1+e^{a}} \Rightarrow a = \ln\left(\frac{200}{3{,}895} - 1\right) = 3{,}9$$

Si t=1 et P(1) = 5,267

$$5{,}267 = \frac{200}{1+e^{3{,}9+b}} \Rightarrow b = \ln(5{,}267 - 1) - 3{,}9 = -0{,}3$$

K=200 a= 3,9 b = – 0,3

2. Estimation des paramètres par interactions dans SPSS

K=244,013 a= 3,889 b = – 0,279

Projections de population active 2003 – 2050 en France

applications du modèle logistique

Emmanuelle Nauze-Fichet, Frédéric Lerais, Stéphane Lhermitte *Projections de population active 2003 – 2050.* (Insee. Résultats. Société N°13 *p.5*

« Le choix d'une forme logistique est particulièrement adapté à la description des phénomènes *se diffusant progressivement dans le temps, avec une étape d'émergence, de développement et de saturation progressive*. Ce choix paraît pertinent pour la description des évolutions de comportements d'activité. »

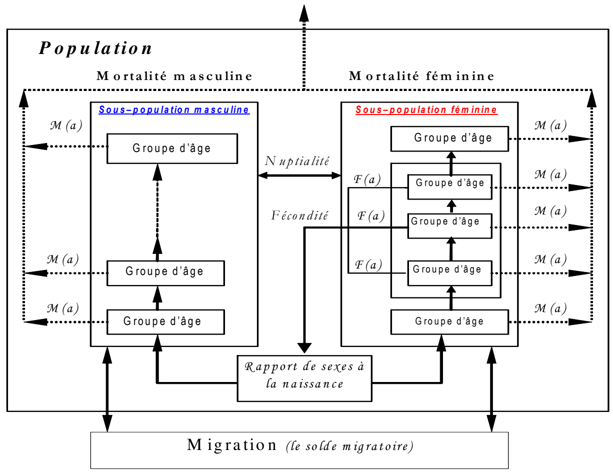
$$trend(t, f, \sigma, t_i)(t) = \frac{p + f\cdot\exp[\sigma\cdot(t - t_i)]}{1+\exp[\sigma\cdot(t-t_i)]}$$

avec

t – temps (0 en 1967);
p – le taux limite passé;
f – le taux limite futur ;
σ – la vitesse de diffusion,
t_i – la date d'inflexion

II. Modèles de l'évolution de structure par âge

population comme un système avec une structure complexe



Population stationnaire : une table de mortalité est un modèle d'une population avec la croissance zéro (r = 0)

L'effectif total d'une population stationnaire ➔ $\sum_x L_x = T_0 = S_0 \cdot e_0$

Nombre de naissance (S_0) = nombre de décès (Σd_x)

$$TBN = TBM = \frac{S_0}{T_0} = \frac{1}{e_0}$$

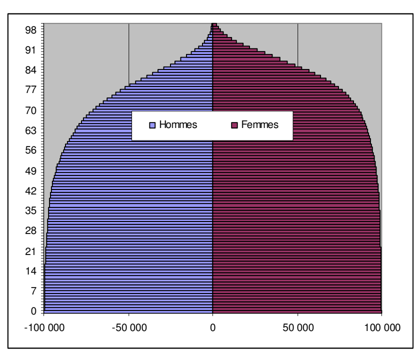
Sa structure par âge est constante et ne dépend que de la survie :

$${}_nC_x = \frac{{}_nL_x}{T_0} = \left(\frac{1}{S_0} \cdot \frac{{}_nL_x}{e_0}\right)$$

L'âge moyen d'une population stationnaire :

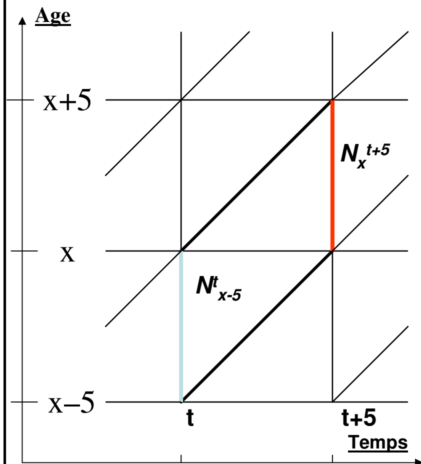
$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nC_x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nL_x}{S_0 \cdot e_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nL_x}{\sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \cdot {}_nL_x}{T_0}$$

Effectif de la population stationnaire de la table de mortalité (France, 2000-2002)



Application de l'hypothèse sur la stationnarité: projection de la population

Projection des survivants vers la fin d'un intervalle de temps



$$\boxed{{}_5N_x^F(t+5) = {}_5N_{x-5}^F(t)\cdot\frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}}$$

$$\frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}$$

Le rapport de survie : la proportion de personnes à l'âge entre ***x-5*** et ***x*** restant en vie au bout de 5 ans dans la *population stationnaire* correspondant à la table de mortalité.

$$\frac{{}_5N_x^F(t+5)}{{}_5N_{x-5}^F(t)} = \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}$$

L'hypothèse de la stationnarité – les conditions de la mortalité sont exactement décrites avec la fonction de mortalité ***µ(x)*** et la distribution de la population par âge à l'intérieur de l'intervalle de ***x-5*** à ***x*** serait la même que la population stationnaire de la table de mortalité

Présentation simplifiée d'une population stable (de Lotka)

Soit

1) ***B(t)*** nombre de naissances croissant selon la loi exponentielle dans une population ***N*** avec un taux d'accroissement ***r*** :

$$B(t) = B(0)\cdot e^{rt}$$

2) ***l(a)*** (ou ***Sa***) une fonction de survie dans la même population ***N*** présentée par la table de mortalité hypothétique :

Age exact (a)	Sa	$(p_a$=Sa/So$) \leq 1$
0	100 000	1,000
1	60 000	0,600
2	40 000	0,400
3	20 000	0,200
4	5 000	0,050
5	0	0,000

et 3) Migration = 0

Population (*non-humaine*) au 1 janvier de 1800 à 1806[1)]

Age	1/1/1800	1/1/1801	1/1/1802	1/1/1803	1/1/1804	1/1/1805	1/1/1806
0	1000	1000 e^r	1000 e^{2r}	1000 e^{3r}	1000 e^{4r}	1000 e^{5r}	1000 e^{6r}
1		600	600 e^r	600 e^{2r}	600 e^{3r}	600 e^{4r}	600 e^{5r}
2			400	400 e^r	400 e^{2r}	400 e^{3r}	400 e^{4r}
3				200	200 e^r	200 e^{2r}	200 e^{3r}
4					50	50 e^r	50 e^{2r}
5						0	0

Au 1 janvier 1805 le rapport entre les naissances et les autres groupes d'âge devient proportionnel à e^{-r}

$$\frac{600 \cdot e^{4r}}{1000 \cdot e^{5r}} = 0{,}6 \cdot e^{-r} \rightarrow \frac{N(1)}{B} = e^{-r} \cdot p_1$$

$$\frac{400 \cdot e^{3r}}{1000 \cdot e^{5r}} = 0{,}4 \cdot e^{-2\cdot r} \rightarrow \frac{N(2)}{B} = e^{-2\cdot r} \cdot p_2$$

$$\frac{400 \cdot e^{3r}}{600 \cdot e^{4r}} = 0{,}667 \cdot e^{-\cdot r} \rightarrow \frac{N(2)}{N(1)} = e^{-r} \cdot {}_1p_1$$

Population stable

structure par âge est constante, définie par un couple *p(a)* et *r*

la variation de l'effectif de chaque classe d'âge est définie par le facteur e^r

$$N(a,t) = B \cdot e^{-ra} \cdot p(a)$$

en divisant par l'effectif total $\int N(a,t)da$ on obtient :

$$c(a) = b \cdot e^{-ra} \cdot p(a)$$

1) cf. Preston et al.(2001), p.139

Conditions d'une population stable :

1. le taux d'accroissement des naissances annuelles est constant
2. les taux de mortalité par âge (table de mortalité) sont constants
3. le solde migratoire = 0 dans tous les âges

Alfred Lotka (1939) a démontré que la **condition 1 ≡ taux de fécondité par âge sont constants**

(1) $$B(t) = \int_0^t N(a,t) \cdot f(a)da$$

B(t) – le nombre de naissance des filles au moment *t*

N(a,t) – l'effectif (nombre) des femmes d'âge *a* au moment *t*

f(a) – taux de fécondité féminine (naissances des filles uniquement)

sachant que $N(a,t) = B(t-a) \cdot p(a)$ t > 0

(2) on peut réécrire (1) ➔ $B(t) = \int_0^t B(t-a) \cdot p(a) \cdot f(a)da\,; \quad t > 50$

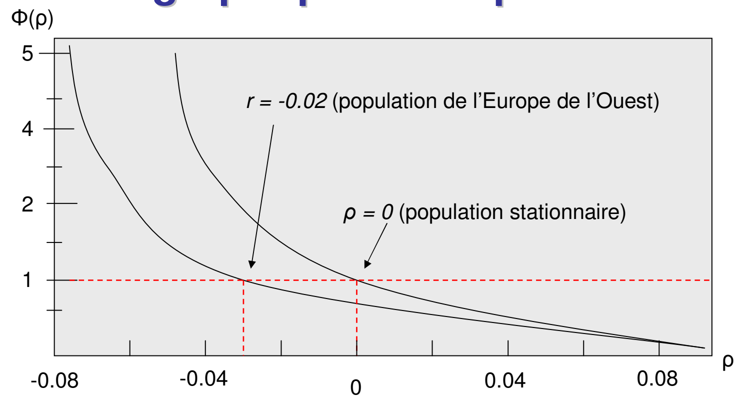
(3) et puisque par définition → $B(t) = B \cdot e^{\rho \cdot t}$

on peut substituer ***B(t)*** dans (2) → $B \cdot e^{\rho\cdot t} = \int_0^t B \cdot e^{\rho(t-a)} \cdot p(a) \cdot f(a)da$

(4) et en le divisant par ***B*** $e^{\rho t}$ on obtient l'équation intégrale de reproduction de la population (équation de Lotka)

$$\boxed{1 = \int_0^t e^{-\rho \cdot a} \cdot p(a) \cdot f(a)da}$$ t > 50

Solution graphique de l'équation de Lotka



Solution unique pour (3) ➔ une seule racine réelle $\rho = r$

(4) $$1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-r\cdot a} \cdot p(a) \cdot f(a)da$$

α et β sont les limites naturelles de l'âge de féconde

Conclusion : une seule et unique population stable corresponde à chaque couple de *p(a)* et *f(a)*

Caractéristiques d'une population stable

Etant :

$$N(a,t) = B \cdot e^{r(t-a)} \cdot p(a) = \left(B \cdot e^{rt}\right) \cdot e^{-ra} \cdot p(a) \rightarrow \boxed{N(a,t) = B(t) \cdot e^{-ra} \cdot p(a)} \quad (5)$$

En intégrant (5) par *a*, on obtient $\int_0^{\omega} N(a,t)da = B(t) \cdot \int_0^{\omega} e^{-ra} \cdot p(a)da$

d'où $$\frac{B(t)}{\int_0^{\omega} N(a,t)da} = b(t) = \boxed{\frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-ra} \cdot p(a)da} = b}$$ ➔ **taux brut de natalité** (6)

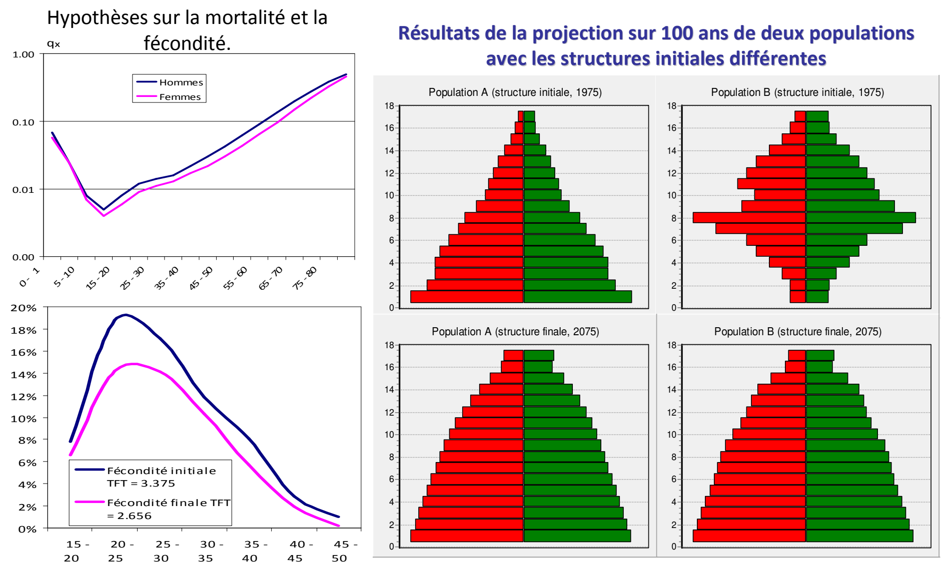
et la structure proportionnelle de la population par âge *c(a,t)* :

$$c(a,t) = \frac{N(a,t)}{N(t)} = \frac{B(t)}{N(t)} \cdot e^{-r\cdot a} \cdot p(a) \Rightarrow \boxed{c(a) = b \cdot e^{-r\cdot a} \cdot p(a)} \quad (7)$$

Propriété ergodique forte: une population avec *p(a)* et *f(a)* constantes « oublie » sa structure initiale

Propriété ergodique faible: des populations où *p(a)* et *f(a)* changent dans la même direction « arrivent » à une structure par âge similaires

Illustration de la propriété ergodique des population stables



Population équivalente à stable

Opérant des valeurs discrètes, on peut réécrire (6), (7) et (4) :

Taux brut de natalité : $$b = \frac{1}{\sum_{a=0,1...}^{\omega} e^{-r(a+0.5)} \cdot \frac{{}_1L_a}{S_0}} \qquad (6a)$$

Structure proportionnelle : $${}_1c_a = b \cdot e^{-r(a+0.5)} \cdot \frac{{}_1L_a}{S_0} \qquad (7a)$$

Equation intégrale : $$1 = \sum_{a=\alpha,1,..}^{\beta} e^{-r(a+0.5)} \cdot \frac{{}_1L_a}{S_0} \cdot {}_1f_5 \qquad (4a)$$

Exercice : réécrivez ces formules pour les groupes d'âge quinquennaux.

On peut trouvez taux de croissance intrinsèque par itérations à partir d'approximation suivante : $$r_0 = \frac{\ln TNR}{AMM}$$ où

TNR – taux nette de reproduction ;

AMM – âge moyen à la maternité

Estimation du taux intrinsèque (Egypte, 1997)

en trois itérations on obtient r = 1,475%

Source : Preston et al. (2001), p.149

Age (a)	(table de mortalité féminine) $_5L_a$	(fécondité féminine) $_5f_a$	(naissances de filles) $_5L_a \times {}_5f_a$	r_0 = 0.01569	r_1 = 0.01473	r_2 = 0.01475	r_3 = 0.01475
				$_5L_a \times {}_5f_a \times \exp[-r_n(a+2.5)]$			
15	4.66740	0.00567	0.026464	0.02010998	0.02045166	0.02044383	0.02044413
20	4.63097	0.06627	0.306894	0.21561160	0.22033300	0.22022453	0.22022867
25	4.58518	0.11204	0.513724	0.33368930	0.34264172	0.34243557	0.34244342
30	4.53206	0.07889	0.357534	0.21471382	0.22153813	0.22138062	0.22138662
35	4.46912	0.05075	0.226808	0.12593024	0.13055968	0.13045258	0.13045666
40	4.39135	0.01590	0.069822	0.03584237	0.03733931	0.03730460	0.03730592
45	4.28969	0.00610	0.026167	0.01241901	0.01300011	0.01298660	0.01298712
		$\Sigma =$	1.5274	0.97400633	1.0005909	0.99997749	1.00000085

1) $AMM \approx 27$

2) $r_0 = \dfrac{\ln TNR}{AMM} = \dfrac{\ln\left(\sum_{a=15}^{45} {}_5L_a \cdot {}_5f_a\right)}{AMM}$

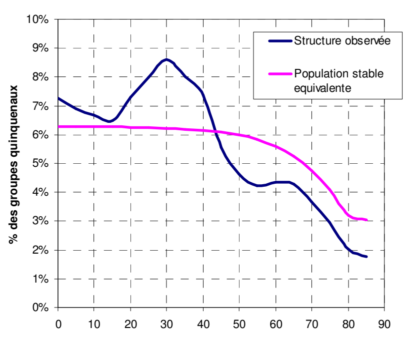
3) $y(r_n) = \sum_{a=15}^{45} e^{-r(a+2.5)} \cdot {}_5L_a \cdot {}_5f_a$

4) $r_{n+1} = r_n + \dfrac{y(r_n)-1}{AMM}$

Exercice : reproduisez ces calculs utilisant comme point de départ l'âge 'exact' des mères

Population équivalente stable

Exemple: Etats Unis, femmes, 1991



$$r = -0{,}00028$$

$$b = \frac{1}{\sum_{a=0}^{80} e^{-r(a+2.5)} \cdot \frac{{}_5L_a}{S_0}}$$

$$b = \frac{1}{79{,}5087} = 0{,}012585$$

$$_5c_a^s = b \cdot e^{-r(a+2.5)} \cdot \frac{{}_5L_a}{S_0}$$

Population équivalente stable (calculs)

Age a	Observée $_5C_a$	$_5L_a$	$_5f_a$	$\exp[-r(a+2.5)] \times {_5L_a}/S_0$	Stable $_5C_a$
0	0.0726	495 804		4.9603	0.0627
5	0.0689	495 002		4.9567	0.0626
10	0.0667	494 603		4.9572	0.0626
15	0.0648	493 806	0.0007	4.9536	0.0626
20	0.0729	492 552	0.0303	4.9455	0.0625
25	0.0799	491 138	0.0566	4.9358	0.0624
30	0.0861	489 356	0.0578	4.9223	0.0622
35	0.0801	486 941	0.0388	4.9024	0.0619
40	0.0735	483 577	0.0157	4.8729	0.0616
45	0.0556	478 475	0.0027	4.8258	0.0610
50	0.0464	470 374	0.0001	4.7484	0.0600
55	0.0422	457 712		4.6247	0.0584
60	0.0436	438 502		4.4346	0.0560
65	0.0429	410 756		4.1578	0.0525
70	0.0365	371 990		3.7688	0.0476
75	0.0294	319 192		3.2368	0.0409
80	0.0203	249 203		2.5293	0.0320
85	0.0176	237 044		2.4081	0.0304
Σ=	1			79.1409	1.0000

Populations semi-stables et quasi-stables

Notions théoriques introduites et développées par A.Coale, J.Bougeois-Pichat et L.Tabah

- On appelle *population semi stable* une population dans laquelle au moment de la stabilisation du régime de reproduction (quand la fécondité et la mortalité deviennent constantes) la structure par âge coïncide avec la structure par âge d'une population stable, i.e. pour une telle population période de stabilisation T=0. Telles sont les population historiques dans lesquelles la fécondité était constante et l'évolution de la mortalité avait une faible influence sur la structure par âge. Telles étaient les populations des pays en voie de développement aux années 1960-1970.
- On appelle *population quasi stable* une population à fécondité constante et à mortalité variable; les caractéristiques des populations de ce type sont voisines de celles des populations semi stables puisque leurs structures par âge varient très peu restant très proche à l'état stable. Telles sont les populations dans la première phase de la transition démographique, quand l'espérance de vie commence à augmenter, mais la fécondité reste encore invariable.

Inertie de la population, potentiel de croissance (population momentum)

Paul Vincent, « Potentiel d'accroissement d'une population » // Journal de la Société de Statistique de Paris, n°1-2, Janvier-Fevrier 1945, p.16-39

Nathan Keyfitz, « On the Momentum of Population Growth » // Demography, 1971, vol.8, no 1, p.71-80

Rolland Pressat « Potentiel d'accroissement des populations », dans Éléments de la démographie mathématiques, Paris, édition de l'AIDELF, 1995, p 176-181

Si une population réelle devient stationnaire, (i.e. $r_0 = 0$ et $R_o = 1$), sa croissance pourrait se continue jusqu'au moment de la stabilisation définitive de sa structure à cause son inertie ou de son « potentiel de croissance » accumulé dans sa structure par âge vers le moment de passage à la stationnarité. Ce potentiel (ou *momentum* démographique) peut être mesurer comme le rapport entre l'effectif initiale de la population et son effectif limite stationnaire.

Les conditions implicites d'estimation de l'inertie d'une population

1. Que la population initiale soit « stable », i.e. qu'elle connaît la mortalité et la fécondité constantes pendant 70-100 ans
(il n'y a que peu voire aucune population contemporaines qui a connu une telle expérience historique).
2. Que la population passe à la fécondité de simple remplacement des générations moyennant un changement proportionnel à tous les âges – inverse à TNR antérieur à la stationnarité
(on a vu que les changement du niveau de la fécondité générale implique la transformation simultané du niveau et de la forme de la distribution des fécondité par âge)

Par ailleurs, la description mathématique de l'inertie (du poteniel) est assez complexe et les facteurs de sa variation ne sont pas évidents.

Estimation de l'inertie de la population (avec les notions en temps continu)

Soit $$B_s = \frac{\int_0^a N(a)\cdot\int_a^\beta \frac{p(y)}{p(a)}\cdot m^*(y)dyda}{A^*}$$ le nombre de naissance sur une année de la durée moyenne de procréation dans une population dès le moment où la stationnarité correspondante à ***m*(x)*** – une fonction maternité et à ***p(x)*** – une fonction survie est atteinte (1)

On peut simplifier l'écriture de la formule (1) en y introduisant l'expression : $$w(a) = \frac{1}{A^*}\cdot\int_a^\beta p(y)\cdot m^*(y)dy \quad (2)$$

qui exprime la part de la totalité des naissances chez les femmes à l'âge « a » au moment 0 (passage à la stationnarité) sur une année de vie dans l'attente d'une naissance (ce qui corresponde à l'âge moyen des mères). Par ailleurs, il est facile de démontrer que $\int_0^\beta w(a)da = 1$

On peut donc réécrire la formule (1) comme suit : $B_s = \int_0^\beta \frac{N(a)}{p(a)}\cdot w(a)da$ et sachant la durée de vie moyenne (***e^o_0***) (3)

en déduire l'effectif final de la population stationnaire $$N_s = B_s \cdot e^o_0 = e^o_0 \cdot \int_0^\beta \frac{N(a)}{p(a)}\cdot w(a)da \quad (4)$$

Par conséquent, on peut mesurer l'inertie ***M*** qui est, par définition, un rapport entre l'effectif final de la population stationnaire et celui au moment de passage à la stationnarité :

$$M = \frac{N_s}{N} = \int_0^\beta \frac{N(a)}{N}\cdot\frac{e^o_0}{p(a)}\cdot w(a)da \rightarrow M = \int_0^\beta \frac{c(a)}{c_s(a)}\cdot w(a)da$$ dépendant ainsi de trois distributions (c, c_s et w)sur l'intervalle entre 0 et 1 (5)

Estimation de l'inertie d'une population à la base des statistiques disponibles

Soit

$_5N_x^F$ - nombre des femmes âgées de x à x+n dans une population observée et $N^F = \sum_x {_nN_x^F}$

N^M - nombre des hommes dans une population observée

$_5L_x^F$ - nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge x, x+n selon la table de mortalité pour le sexe féminin

e_0^F et e_0^M - l'espérance de vie à la naissance des femmes et des hommes respectivement

$_5f_x^F$ - taux de fécondité féminine par âge observés

Alors on peut estimer

le taux net de reproduction = $TNR = \sum_{15}^{45} {_5f_x^F} \cdot {_5L_x^F}$

les taux par âge de la fécondité correspondante au régime stationnaires = $_nf_x^{F'} = \frac{_nf_x^F}{TNR}$ c'était ***m*(x)*** – fonction de maternité dans le temps continue

l'âge moyen des mères dans la population stationnaire *(ou la durée moyenne de la procréation)* $AMM^s = \sum_{x=15}^{45} (x+2.5) \cdot {_nf_x^{Fs}} \cdot {_nL_x^F}$

Calculs du nombre de naissances féminines et de l'effectif de population stationnaire finale et le potentiel de croissance

Il faut maintenant estimer le nombre de naissances produites par les femmes, qui avait l'âge x < β (β – âge limite de fécondité)

Soit $_nw_x = \frac{0.5 \cdot {_nL_x^F} \cdot {_nf_x^{Fs}} + \sum_{y=x+5}^{45} {_nL_y^F} \cdot {_nf_y^{Fs}}}{AMM^s}$ **une part de naissances dans l'état stationnaire réduites à un année de l'âge moyen des mères,**
(chez les femmes âgées de x à x+n au moment de passage au régime stationnaire)

pour les âges < 15 ans $_nw_x$ = 1/AMM

pour les âges > 15 ans $_nw_x$ = (1/AMM)*(K1+K2) où

$K1 = 0{,}5 \cdot {_nL_a} \cdot {_nf_a^{Fs}}$ les naissance à l'âge « a » au moment zéro

$K2 = \sum_{y=a+5}^{\beta} {_nL_y} \cdot {_nf_y^{Fs}}$ les naissances après l'âge a+5

Alors $B_s^F = 5 \cdot \sum_{x=0}^{45} \frac{_5N_x^F}{_5L_x^F} \cdot {_5w_x^F}$ **- le nombre de naissances féminines dans la population stationnaire**

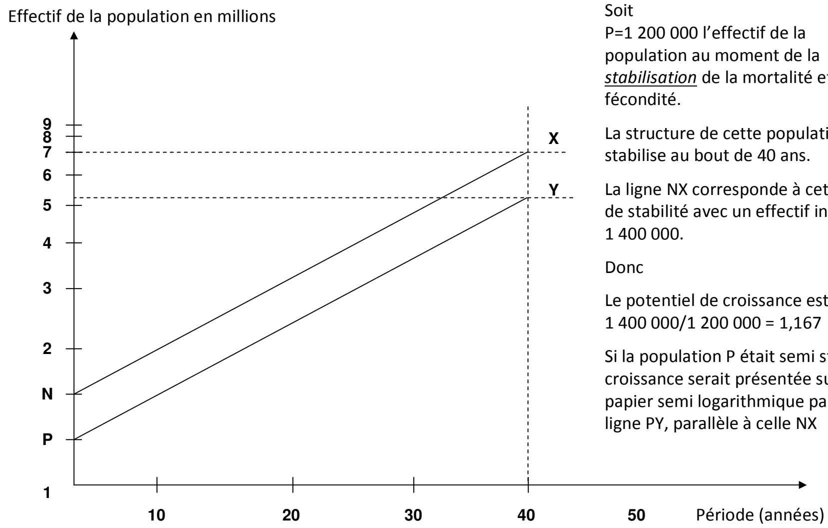
Plus exactement il faudrait écrire : $B_s^F = \sum_{x=0}^{45} \frac{_5N_x^F}{(_5L_x^F/5)} \cdot {_5w_x^F}$ puisque $_5L_x$ /5 sert un estimateur de la fonction de survie (voir formule 3 sur la diapositive 33)

$N_s^F = B_s^F \cdot e_0^F$ - le nombre des femmes dans la population stationnaire

$N_s^M = B_s^F \cdot RSN \cdot e_0^H$ - le nombre des hommes dans la population stationnaire (RSN –rapport des sexes à la naissances)

Potentiel de croissance : $M = \frac{N_S^F + N_S^H}{N^F + N^H}$

Présentation graphique du potentiel de croissance accumulé dans la structure par âge (l'inertie de la population)



Soit
P=1 200 000 l'effectif de la population au moment de la *stabilisation* de la mortalité et de la fécondité.

La structure de cette population se stabilise au bout de 40 ans.

La ligne NX corresponde à cette état de stabilité avec un effectif initial de 1 400 000.

Donc

Le potentiel de croissance est égale à 1 400 000/1 200 000 = 1,167

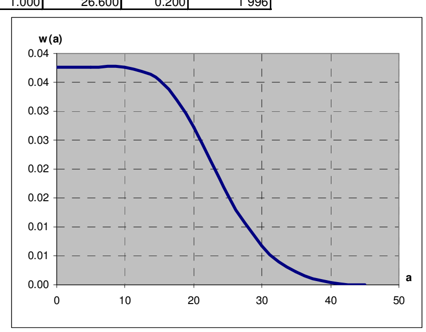
Si la population P était semi stable sa croissance serait présentée sur le papier semi logarithmique par la ligne PY, parallèle à celle NX

Exemple numérique de calcul du potentiel de croissance

Asie de l'Ouest 1995-2000

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Age a	5NFa	5La	f(a)	"4" x "3" 5f(a) * 5La	"4"/Σ"5" 5ф(a)	"6 "x "3" 5ф(a) * 5La	("1"+2.5) x "7"	w(a)	5 x "9" x "2" / "3" Bs
0	12 023	4.834						0.03759	468
5	11 027	4.803						0.03759	432
10	9 856	4.789						0.03759	387
15	8 614	4.773	0.043	0.205	0.025	0.121	2.11	0.03533	319
20	7 694	4.748	0.112	0.532	0.066	0.312	7.03	0.02719	220
25	6 893	4.716	0.112	0.528	0.066	0.310	8.53	0.01549	113
30	6 135	4.678	0.058	0.271	0.034	0.159	5.18	0.00667	44
35	5 318	4.631	0.029	0.134	0.017	0.079	2.96	0.00219	13
40	4 376	4.57	0.007	0.032	0.004	0.019	0.80	0.00035	2
45	3 510	4.483	0	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00000	0
Somme			1.805	1.703	0.212	1.000	26.600	0.200	1 996
					1.060				

Population actuelle					
	Femmes	Hommes		NRR=	1.703
N =	87176	91845	179021	AMM=	26.600
Eo=	70.3	65.9			
Population stationnaire				Bs=	1 996
N =	140332.2	138126.37	278459	SR=	1.05
Momentum =	1.56				



Le moment de la croissance démographique (*population momentum*)

Deux facteurs de croissance de la population mondiale :

1. Le régime démographique avec le remplacement élargi des générations (la génération des filles est plus nombreuse que la génération des mères : on dit « le taux net de reproduction > 1 ») ;
2. L'effet de la structure par âge des populations, désigné comme « ***population momentum*** » en anglais (on pourrait dire « le moment de croissance démographique » ou « le moment de population »)
   = croissance (ou décroissance) provenant de l'inertie de la structure de la population .

On mesure le moment de croissance comme un rapport entre les effectifs initiaux d'une population au moment de stabilisation et d'une population stable correspondante la l'état finale de cette première population .

Valeurs estimées du « population momentum » pour les régions et quelques pays du monde

Région ou pays	Population momentum
Afrique	1,56
Asie de l'Est	1,22
Asie Sud-centrale	1,47
Asie Sud-est	1,48
Asie de l'Ouest	1,56
Europe	0,98
Amérique Latine	1,48
Amérique du Nord	1,10
Australie	0,96
Russie	0,94
Italie	0,91
Allemagne	0,88
Population mondiale	***1,35***

Source : Preston S.H., M. Guillot (1997) « Population dynamic in an Age of Declining Fertility" *Genus*, vol.53, n°3-4, p.15-31

Approche matricielle de modèles de population

Matrice de Leslie

$$\begin{pmatrix} k\cdot F_1\cdot\frac{L_2}{L_1} & k\cdot\left[F_1+F_2\cdot\frac{L_2}{L_1}\right] & \dots & k\cdot\left[F_{\omega-1}+F_\omega\cdot\frac{L_2}{L_1}\right] & k\cdot F_\omega \\ \frac{L_2}{L_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{L_3}{L_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_\omega}{L_{\omega-1}} & \frac{T_\omega}{T_{\omega-1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \dots. \\ W_{\omega-1}(t) \\ W_\omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1(t+n) \\ W_2(t+n) \\ \dots. \\ W_{\omega-1}(t+n) \\ W_\omega(t+n) \end{pmatrix}$$

$$\vec{W}(t+n\cdot m) = L^m\cdot\vec{W}(t)$$