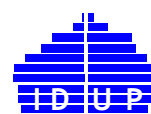




Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie



Cours d'analyse démographique et modèles de populations niveau : **Master de démographie** par Alexandre Avdeev,

Chapitre 10

Modèles de la mortalité

- Ajustement avec une fonction analytique: l'idée de Gompertz et son développement par Makeham, Perks, Helligmen et Pollard ;
- Modèle de la mortalité infantile de Bougeois-Pichat
- Présentation tabulaire ou les tables type de mortalité : Nations Unies, A. Coale & P. Demeni, S. Ledermann ;
- Modèle relationnelle de mortalité de W.Brasse

Lecture :

Nations Unies, *Manuel X 'Techniques indirectes d'estimation démographique'* Nations Unies, 1984, ST/ESA/SER.A/81 (disponible sur le site WEB des NU)

Rolland Pressat, *Éléments de démographie mathématique*. Edition de l'AIDELF, Paris, 1995, p.1-48

H. Leridon et L. Toulemon, *Démographie. – Approche statistique et dynamique des populations*. Economica, Paris, 1997, p.211-232

Samuel H. Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot – *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*. Blackwell Publishing, 2000, p.191-201

Jaques Vallin, Graziella Caselli – “La table de mortalité d'une génération”, dans G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch (dir.) *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol.I, *La dynamique des populations*. Paris, INED, 2001, p.165-212

La simplification et la réduction du nombre des hypothèses dans les projections (rappel) :

Problèmes:

- La désagrégation de la population (subdivision en groupes par âge et par sexe dans lesquels la mortalité, la fécondité et la migration sont plus ou moins *homogènes*) permet de d'obtenir une représentation précise d'un phénomène étudié, mais **la multiplication des séries de nombres est encombrante**.
- L'application de la méthode des composantes demande des taux de fécondité, de mortalité et de migration par âge et par sexe pour chaque intervalle de la période de projection, par conséquent **des hypothèses se multiplient**.

Solution plausible – réduction de l'information d'entrée d'un modèle :

- Construire un modèle et d'associer, ou de mettre en correspondance, les distributions des taux par âge avec le nombre réduit (un, deux ou trois) des paramètres.
- Le modèle représente **un standard** pour les distributions des taux par âge (risque), **basé sur l'expérience de plusieurs populations** pour lesquelles la qualité des données est bonne.

Éléments et étapes de construction d'un modèle (rappel)

- Spécification du modèle : une description mathématique (en langage mathématique) du comportement d'un objet
 - **Objet** – une population ou un phénomène démographique
 - **Variable** – une caractéristique quantitative de l'objet (le plus souvent, il s'agit d'un indicateur démographique)
 - Variable endogène est celle qui se forme à l'intérieur du modèle
 - Variable endogène est celle qui vient de l'extérieurs du modèle
 - **Modèle**: la description mathématique des liens entre les variables représenté soit :
 - graphiquement
 - en tableaux
 - comme un système des équations ou des inéquations mathématiques qui mettent en liaisons toutes les variables
 - Équation de modèle est structurelle, se elle comporte plus qu'une variable endogène → modèle est structurel si l'une des équation est structurelle
 - Équation de modèle est réduite, si elle ne comporte qu'une seule variable endogène → modèles représentant une seule équation ont toujours la forme réduite
 - **Modèle est « fermé »** s'il ne comporte que les variables endogènes, sinon il est « ouvert »
 - **1er principe de spécification** : modèle est une expression en langue mathématique des comportements d'un objet qui correspondent à des lois mises en évidence par la théorie démographique
 - **2d principe de spécification** : nombre d'équations d'un modèle = nombre des variables endogènes
 - **3e principe de spécification** : prendre en considération le temps (dater les scores de variables)
- Collecte et traitement préliminaire de l'information initiale
- Estimation numérique des paramètres inconnus du modèle
 - Paramètre est un élément déterminant les relations entre les variables
- Vérification d'adéquation du modèle (en quel mesure il est conforme à la réalité)

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

3

Les avantages des modèles (rappel) :

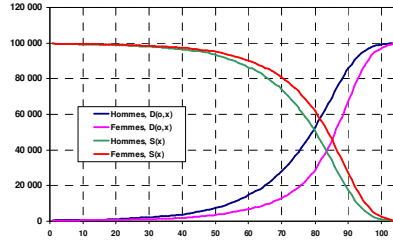
- 1. Une possibilité d'évaluer la qualité des données et de réparer leurs défauts :**
 - ✓ La comparaison avec un modèle permet de repérer des particularités des données observées y compris celles liées aux erreurs d'observation et de l'enregistrement.
 - ✓ Le modèle permet de lisser (réparer) les données non régulières ou remplir des lacunes d'observation.
- 2. Une estimation indirecte des indicateurs démographiques :**
 - ✓ En faisant le recoure à des méthodes statistiques il est plus facile d'estimer un ou deux que plusieurs paramètres.
 - ✓ Un modèle permet aussi de pouvoir observer les variables non observées
- 3. Etudes des facteurs de l'évolution démographique:**
 - ✓ L'interprétation qualitative des paramètres de modèles démographiques est le plus souvent transparente et sans équivoque.
 - ✓ La dynamique des valeurs d'un paramètre illustre l'évolution du comportement démographique.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

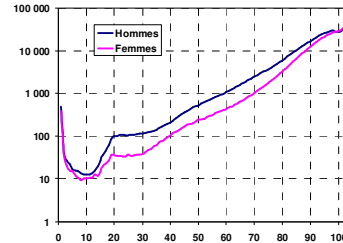
4

Mortalité de point de vue de démographie

Survivants et décédés à l'âge x
exemple : France 2001-2002



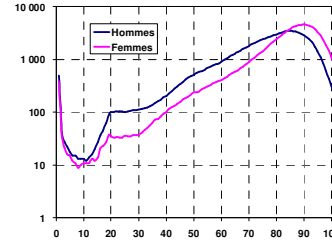
Quotients de mortalité par âge et par sexe
sur papier semi logarithmique



Tables de mortalité (rappel)

1. Indicateurs principaux
($S_x, {}_n d_x, {}_n q_x, {}_n p_x, {}_n m_x, {}_n L_x, T_x, e_x, D_x$)
2. Méthodes de constructions
(à partir des taux par âge, des quotients etc.)
3. Relations entre les indicateurs d'une table de mortalité

Décès par âge et par sexe



Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

5

Relations entre les indicateurs de la table de mortalité (rappel)

$${}_n q_x = 1 - e^{-n \cdot m_x} \quad \text{si } a=n/2 \rightarrow \quad {}_n q_x = \frac{n \cdot m_x}{1 + (n - a) \cdot m_x} \quad \text{si } a=n/2 \rightarrow \quad {}_n q_x = \frac{2n \cdot m_x}{2 + n \cdot m_x}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x; \quad {}_n q_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{S_x} = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x}; \quad S_{x+n} = S_x \cdot (1 - {}_n q_x) = S_x \cdot {}_n p_x; \quad S_{x+1} = \prod_x p_x$$

$$d_x = S_x - S_{x+1}; \quad \sum_{x=0}^{\omega} d_x = (S_0 - S_1) + (S_1 - S_2) + \dots + (S_{\omega-1} - S_{\omega}) = S_0; \quad \text{Si } S_0 = 1; \quad \therefore \sum_{x=0}^{\omega} d_x = 1;$$

$$D_x = \sum_{x=0}^x d_x; \quad S_x + D_x = S_0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x = D_{\omega}; \quad {}_n L_x = n \cdot \frac{(S_x + S_{x+n})}{2}; \quad {}_n L_x = n \cdot \frac{S_x - S_{x+n}}{\ln S_x - \ln S_{x+1}}; \quad T_x = \sum_x {}_n L_x$$

$$\bar{e} = \sum_{x=0}^{\omega} (x + \alpha_x) \cdot d_x = e_0 \quad e_0 = \sum_{x=0}^{\omega-1} L_x \quad e_0 = a + \sum_{x=0}^{\omega-1} x \cdot d_x \quad e_x = \frac{T_x}{S_x}$$

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

6

Approche mathématique de la mortalité

1. Correspondance des indicateurs (discrets) de table de mortalité classique aux fonctions (continues)

Indicateurs de table :	Fonctions correspondantes :
S_x – nombre de survivants à l'âge exact x	$\rightarrow S(x)$ – fonction survie := $l(x)$
${}_n d_x$ – nombre de décès entre l'âge x et $x+n$ on peut écrire $d(x, x+1)$, en occurrence $n=1$.	$\rightarrow d(x)$ – fonction décès
${}_1 q_x$ – quotient annuel de mortalité à l'âge x	$\rightarrow q(x)$ – fonction quotient := $\mu(x)$ $\mu(x)$ – force de mortalité

2. Passage des suites des indicateurs de la table de mortalité à des fonctions

$S(x)$ – on peut imaginer une interpolation à partir de l'ensemble de points de la suite $\{x, S_x\}$

$d(x)$ – difficile à partir de la suite $d(x, x+\Delta x)$, correspondant à une suite $\Delta x \rightarrow 0$, puisque la valeur limite est nulle puisqu'il ne pas possible de dénombrer des décès à une date (moment) ponctuel
la solution est de passer à

la densité de décès sur une intervalle infinitésimal $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x, x+\Delta x)}{\Delta x}$

Alors $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x, x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(x, x+\Delta x)}{\Delta x} = -S'(x) = d(x)$ et le nombre de décès sur un intervalle infinitésimal = $d(x)dx$

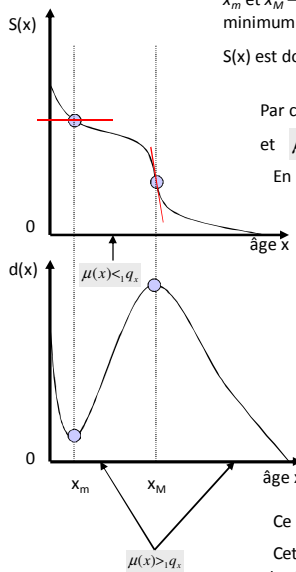
$q(x)$ – se fabrique aussi à partir de $S(x)$ avec les même précautions que pour $d(x)$

$$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x, x+\Delta x)}{\Delta x \cdot S(x)} = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow q(x) = -[\ln S(x)]' \rightarrow S(x) = e^{-\int_0^x \mu(\xi) d\xi}$$

juste pour écriture
 $q(x) := \mu(x)$

voir le cours d'analyse chapitre 5 diapositive 17

Relations entre les indices de table et les fonctions continues associées



x_m et x_M – deux points d'inflexions de la fonction survie, qui correspondent au minimum et au maximum de densité des décès.

$S(x)$ est donc concave sur les intervalles $(0, x_m)$ et $(x_M, \omega) := S''(x) \geq 0$, si $x \in \begin{cases} (0, x_m) \\ (x_M, \omega) \end{cases}$;

Par conséquent sur ces intervalle $d(x)$ est décroissante, donc $d(x) > d(x+\theta) = d_x$ et $\mu(x) > q_x$

En revanche $S(x)$ est convexe sur l'intervalle $(x_m, x_M) := S''(x) \leq 0$, si $x \in (x_m, x_M)$

alors $d(x) < d(x+\theta) = d_x$ et $\mu(x) < q_x$

Par définition $\mu(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow \ln S(x) = -\int \mu(x) dx + \ln C \rightarrow$

$$S(x) = C \cdot e^{-\int \mu(x) dx + \ln C} = C \cdot e^{-F(x)}$$

$\ln C$ – une constante arbitraire
 $F(x)$ – une fonction de x

Sachant que ${}_1 q_n = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x}$ on peut écrire ${}_1 q_n = 1 - \frac{S_0 \cdot e^{-\int_0^{x+n} \mu(\xi) d\xi}}{S_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu(\xi) d\xi}} \rightarrow$

$${}_1 q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(\xi) d\xi} = 1 - e^{-\mu} \text{ ou simplement } e^{-\mu} = 1 - {}_1 q_x$$

Ce qui donne une possibilité pour μ d'être > 1 sous la condition que $\ln(1 - {}_1 q_x) > 1$

Cette condition est remplie dès que $1 - {}_1 q_x < e^{-1}$, := ${}_1 q_x > 0,632$

D'après les tables de Kannisto-Tatcher une telle situation a lieu après l'âge de 110 ans
voir <http://www.demogr.mpg.de/databases/ktadb/>

Une hypothèse : le risque est une fonction paramétrique de l'âge

La formule de Gompertz-Makeham

Quotients de mortalité (probabilité de mourir)
France, 2000-2002

Gompertz, 1825: $\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x}$

à partir de l'âge ~30-40 ans le logarithme du taux de mortalité est une fonction linéaire de l'âge

$$\ln[\mu(x)] = \ln \alpha + \beta \cdot x$$

α – est le paramètre de niveau (de l'espérance de vie « naturelle »)

β – est le paramètre la vitesse de extinction

Makeham, 1860: $\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} + \gamma$

où γ – paramètre qui détermine l'influence des facteurs de la mortalité « exogène » (accidents, infection etc.)

$$\ln S_x = a + b \cdot c^x$$

voir une encadré du diapositive 8

9

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

Application de la formule de Gompertz pour « fermer » une table de mortalité

$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} \Rightarrow S(x) = C \cdot a^{b^x}$ On peut estimer les paramètres C , a et b à partir de trois valeurs d'une table de mortalité

$$b = \frac{\left[\frac{\ln \frac{S(x+2n)}{S(x+n)}}{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}} \right]^{\frac{1}{n}}}{\frac{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}}; \quad a = \exp \left(\frac{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}{b^x \cdot (b^n - 1)} \right); \quad C = S(x) \cdot \exp(-b^x \cdot \ln a)$$

Exemple: France, table de mortalité 2000-2002

x	S(x)	$\hat{S}(x)$
75	61250	61250
80	47391	47391
85	30554	30554
90		14418
95		3988
100		442
105		10
110		0

$$b = \frac{\left[\frac{\ln \frac{S(85)}{S(80)}}{\ln \frac{S(80)}{S(75)}} \right]^{\frac{1}{5}}}{\frac{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}} = 0,999886;$$

$$a = \exp \left(\frac{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}{b^{75} \cdot (b^5 - 1)} \right) = 1,113403$$

$$C = S(75) \cdot \exp(-b^{75} \cdot \ln a) = 87860,06$$

10

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

Problème d'estimation de la mortalité aux âge très élevés

On observe qu'aux âges très élevés la croissance de la force de mortalité ralentit avec l'augmentation de l'âge

Perks W. (1932) – "On Some Experiments in the Graduation of Mortality Statistics" *Journal of the Institute of Actuaries*, 109, p.225-240

Vaupel J.W., K.S.Manton and E.Sallard (1979)– "The impact of heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamic of Mortality" *Demography*, Vol.16, no.3, p.439-454

Horiuchi, Shiro and A.J.Coale (1990)– "Age patterns of Mortality for Older Women: An Analysis Using the Age-specific Rate of Mortality Change with Age" *Mathematical Population Studies*. Vol.2, no.4, p.245-267

Solution de Perks: recours à un modèle logistique :

soit $\mu(x)$ – la force de mortalité à l'âge exact x telle que $\mu(x) = \frac{\beta \cdot \gamma^x}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$
(son estimateur est le taux de mortalité)

et son complément à un $1 - \mu(x) = \frac{1}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$ d'où

$$\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} = \beta \cdot \gamma^x \Rightarrow \text{donc logit de } \mu(x) \left[\ln \left[\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} \right] = a \cdot x \right. \text{ est un fonction linéaire de l'âge}$$

logit de $\mu(x)$ →

Mortalité aux âge très jeunes

Aux âges précoces la diminution de la mortalité avec l'augmentation de l'âge est très rapide et non linéaire

Bourgeois-Pichat J. (1946) – « De la mesure de la mortalité infantile » *Population*, Vol.1, N°1, p.53-68

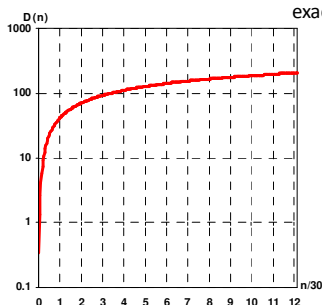
Bourgeois-Pichat J. (1951) – « La mesure de la mortalité infantile. II, Les causes de décès » *Population*, Vol.6, N°3, p.459-480

Lantoin C., et R.Pressat (1984) – « Nouveaux aspects de la mortalité infantile » *Population*, Vol.39, N°2, p.253-264

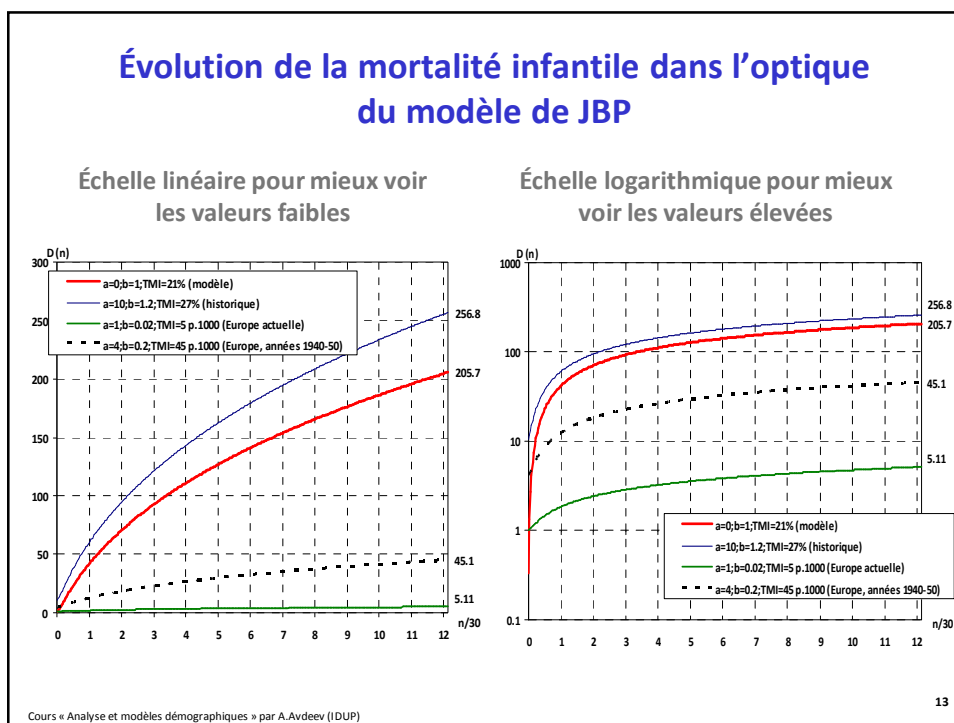
Solution de Bourgeois-Pichat : décomposition de la mortalité infantile en mortalité « endogène » et celle « exogène ». Soit $D(n)$ est la probabilité de mourir avant l'âge exact $n+1$, telle que

$$D(n) = a + b \cdot [\ln(n+1)]^3$$

- a – mortalité exogène (accidents, infections etc.) : supposée d'être indépendante de l'âge (une constante)
- b – paramètre de la mortalité « endogène », celle-ci est dépendante de l'âge en jours
- n – l'âge en jours (on ajoute 1 pour transformer l'âge révolu à l'âge atteint dans la journée).



En fait, l'expression $[\ln(n+1)]^3$ représente un modèle de la « mortalité infantile naturelle) et la variation du paramètre a joue le rôle majeur dans la variation du niveau historique de la mortalité infantile.



Possibilité d'ajustement de la fonction $\mu(x)$ « force de la mortalité » ou fonction quotient par morceau

Exemple du Roland Pressat (1995), p.4-5

Soit sur un intervalle la courbe de survie pourrait être approximée par une parabole quadratique

$$S(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + f \cdot x^4$$

à partir de cet ajustement il est possible d'estimer les valeurs de la fonction de décès (densité) et de celle de quotient (force de mortalité) :

$$d(x) = -S'(x); \quad \mu(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}$$

prenons 5 points d'âge (x) notés respectivement -2; -1; 0; +1; +2, alors pour l'âge 0 la densité de décès $d(0)$ sera égale à $-S'(0) = -b$

On peut estimer le paramètre b , à partir du système d'équations:

$$\begin{cases} S(-1) = a - b + c - d + f \\ S(+1) = a + b + c + d + f \\ S(-2) = a - 2b + 4c - 8d + 16f \\ S(+2) = a + 2b + 4c + 8d + 16f \end{cases}$$

Qui nous donne $-b = d(x) = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12}$

et $q(x) = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12 \cdot S(x)}$

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 14

Modèle général de la mortalité

Heligmen L. and H.Pollard (1980) – "The Age Patterns of Mortality" *Journal of the Institute of Actuaries*.
Vol.107, Part 1, no 434, p.49-80

Solution de Heligmen and Pollard: modèle représente la somme de trois courbes et comporte huit paramètres

La première composante diminue rapidement.

La deuxième composante gère la surmortalité accidentelle et maternelle

La troisième composante a la même nature que la formule logistique pour les âges élevés

$$\frac{{}_1q_x}{{}_1p_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

Il est aussi possible de décrire la mortalité ainsi, mais dans ce cas q_x peut théoriquement, mais jamais en pratique dépasser 1

$${}_1q_x = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + \frac{G \cdot H^x}{1 + G \cdot H^x}$$

Mortalité croissant selon la loi de Gompertz-Perks

Surmortalité aux âges moyens

Mortalité infantile et juvénile
A – niveau de la MI;
B – paramètre de position
C – paramètre de vitesse

Figure 1. The graduated q_x curve and its three components: Australian national mortality, 1970-72 (males).

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

Paramètres du modèle de Helligmen-Pollard

(estimation → Mortpak for Windows, procédure UNARB)

$$\frac{{}_1q_x}{{}_1p_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

La première composante diminue rapidement.

La deuxième composante gère la surmortalité accidentelle et maternelle

La troisième composante a la même nature que la formule logistique pour les âges élevés (vieillesse)

A – niveau de la MI;
B – paramètre de position
C – paramètre de vitesse

F – paramètre de position
E – paramètre de l'extension (largeur)
D – paramètre de niveau (hauteur)

G – niveau de base de la mortalité
H – la vitesse de croissance

X₀ – âge, où q₀/p₀=1 → (q_x = 0.5)

$q_0/p_0 = G \cdot H^{X_0}$

$q_x = G \cdot H^x / (1 + G \cdot H^x)$

$q(x) = G \cdot H^{(x-X_0)}$

Figure 1. The graduated q_x curve and its three components: Australian national mortality, 1970-72 (males).

Lecture : A.Rogers and K.Gard « Application of the Helligmen-Pollard model mortality schedule » // *Population Bulletin of the United Nations*, No. 30 -1991, p.79-105

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

II. Modèles tabulaires: tables types

Lecture : Josianne Duchène « Les tables types de mortalité » Dans : G.Caselli, J.Vallin et G.Wunsch *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. VIII Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche, INED, Paris, 2006 p.267- 290

1. Table type de mortalité des Nations Unies, 1955: modèle avec un seul paramètre

United Nations (1955) – *Age and Sex Patterns of Mortality: Model Life Tables for Underdeveloped Countries*. NY

Données de base: 158 tables de mortalité des pays en développement (mauvaise qualité des données)

Principe de construction: équations récurrentes ou les calculs en chaîne $\rightarrow {}_5q_x$ (probabilité de mourir entre l'âge x et $x+5$) est la fonction quadratique de ${}_5q_{x-5}$ à l'exception de ${}_1q_0$ et ${}_4q_5$ pour lesquelles les intervalles = $x+1$ et $x+4$)

$${}_5q_x = A + B \cdot {}_5q_{x-5} + C \cdot {}_5q_{x-5}^2$$

+ **Avantage:** simplification des hypothèse, modèle avec **une seule entrée** (mortalité infantile: ${}_1q_0 \rightarrow {}_4q_5 \rightarrow {}_5q_{10}$ etc.)

– **Désavantage:** biais systématique (erreur moyenne $\neq 0$) ou la reproduction de l'erreur initial à cause des calculs en chaîne (surestimation de l'espérance de vie de ≈ 2 ans en moyen .
(Cf Gabriel K.R., Ronen I. – Estimates of mortality from infant mortality rates. *Population Studies*, 1958, vol.12, no. 2, p.164-169 : ont proposé de passer de ${}_1q_0$ à ${}_4q_1$ par une relation quadratique et d'estimer les quotients de mortalité comme une fonction linéaire de ${}_1q_0$: ${}_nq_5 = A+B \cdot {}_1q_0$)

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

17

2. Table type de mortalité régionales de Coale–Demeny, 1966 et 1983: modèle avec deux entrées

Coale A.J. and P.Demeny (1966) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. Princeton. Princeton University Press

Coale A.J. and P.Demeny with B.Vaughan (1983) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. NY, Academic Press

Données de base: initialement 326 tables de décès par sexe et la population au recensement par âge et par sexe, 192 tables de mortalité sélectionnées d'après étude visuelle de la dispersion des ${}_5q_x$

Principe de construction: classification des tables selon la similarité des structures des taux de mortalité par âge (plus exactement – selon la similarité de la densité de probabilité de mourir).

1e étape: pour chaque âge tous les valeurs de ${}_nq_x$ ont été ordonnées

2e étape: pour chaque rang de ${}_nq_x$ les tables de mortalité type ont été préliminairement construites.

3e étape: chaque table initiale a été comparée avec une table type préliminaire ayant à peu près le même niveau de mortalité générale (e_0) et les tables défailtantes ont été rejetées

4e étape: 192 tables sélectionnées ont été réparties en 4 groupes selon la similarité des distributions des survivants

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

18

Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Coale-Demeny.

Type « Nord »

Donnée de base: 9 tables en provenance de Suède (avant 1920), de Norvège et d'Islande

Particularités: la mortalité infantile et la mortalité aux âge très élevés sont relativement basse

Type « Sud »

Donnée de base: 22 tables en provenance d'Espagne, du Portugal et d'Italie méridionale

Particularités: la mortalité avant l'âge de 5 ans et après l'âge de 65 est élevé, mais la mortalité dans l'intervalle d'âge 40-60 ans est faible.

Type « Est »

Donnée de base: 31 tables en provenance d'Allemagne, d'Autriche, de Tchécoslovaquie, du Nord de l'Italie, d'Hongrie et de Pologne

Particularités: la mortalité infantile et après l'âge de 50 ans est très élevée.

Type « Ouest »

Donnée de base: toutes les autres tables (130) de l'Europe de l'Ouest, des populations européennes d'outre-mer, de Japon (milieu de 20e siècle) et de Taiwan

Particularités: il n'y a pas des déviations substantielles.

Sélection d'une table de mortalité dans les tables la mortalité type régionales de Coale-Demeny.

1 entrée: Choisir la famille des table (Nord, Sud, Est, sinon – Ouest) à partir de l'analyse de la mortalité par âge.

2 entrée: Choisir le niveau de mortalité à partir de l'espérance de vie à l'âge 10 ans (e_{10})

24 niveau de mortalité dans chaque famille

Niveau 1 → $e_{10}=20,0$

Niveau 2 → $e_{10} = 22,5$ (niveau 1 + 2,5)

Niveau 3 → $e_{10} = 25,0$ (niveau 1 + 2,5)

.....

Niveau 24 → $e_{10} = 77,5$ (niveau 23 + 2,5)

La dernière révision (modification) des tables de Princeton date de 1989 et concerne les âges >80 ans: croissance exponentielle de Gompertz a été remplacé par la croissance linéaire du $[ln({}_5m_x) - ln({}_5m_{x-5})]$, et l'augmentation de e_0 jusqu'à 80 ans (niveau) pour toutes les familles de tables – types

3. Tables type de Ledermann

Ledermann, S. et J.Breas (1959) – « Les dimensions de la mortalité » *Population*, vol.14, N°4, p.637-682

Ledermann, Sully (1969) – *Nouvelles tables-types de Mortalité*. INED, Travaux et Document, cahier N° 53. Paris PUF.

Données de base: 154 tables de mortalité (presque la même base que les NU ont utilisée pour les tables type 1955)

Principe de construction: analyse factorielle (analyse des composantes principales), modèle de régressions avec un ou deux paramètres, et sept ou cinq variables indépendantes (entrées) respectivement.

+ Avantage: flexibilité extrême du modèle grâce à la multitude des variables indépendantes, moyens statistiques d'évaluation de la magnitude de la divergence entre valeurs observées et celles estimées

- Désavantage: les relations dures entre la mortalité féminine et celle masculine (p.ex. impossible scénario où $e_0^h > e_0^f$)
Il est souvent difficile d'estimer les variables faute des données nécessaires

Tables type de Ledermann (suite)

5 facteurs principaux:

- I. Le niveau de la mortalité générale
- II. Le rapport entre la mortalité juvénile et la mortalité des adultes
- III. La structure de la mortalité par âge aux âges élevés
- IV. La mortalité juvénile (dans l'intervalle d'âge 0-5 ans)
- V. La divergence de la mortalité par sexes

Expliquent **90%** de la dispersion

Modèle factoriel

Modèle basé sur l'analyse de régression

Modèle à un paramètre: $\ln_5 q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot \ln Q$

Variables indépendantes: $e_0, 1q_0, 5q_0, 15q_0, 20q_{30}, 20q_{45}, m_{50+}$

Modèle à deux paramètres: $\ln_5 q_x = b_0(x) + b_1(x) \cdot \ln Q_1 + b_2(x) \cdot \ln Q_2$

Variables indépendantes en couple: $5q_0$ et $20q_{45}$; $15q_0$ et $20q_{30}$; $15q_0$ et m_{50+}

Toutes les variables indépendantes se réfèrent à chaque sexe à l'exception de $20q_{30}$ qui se réfère à la mortalité féminine uniquement.

4. Modèle relationnel de mortalité de W.Brass

Brass, William – "On the Scale of Mortality" in W.Brass, ed. *Biological Aspects of Demography*. London: Taylor and Francis Ltd; NY: Barnes & Noble Inc.1971, p.69-110

Rolland Pressat – *Elements de démographie mathématique*, Paris, édition de l'AIDELF, 1995 p.41-47 ("Familles de tables de mortalité")

La base théorique: la logit-transformation de $q(x)$, la probabilité de mourir avant l'âge x

$$\text{logit}[q(x)] = \frac{1}{2} \cdot \ln \left[\frac{q(x)}{1-q(x)} \right] \quad \text{où } 0 \leq q(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -\infty \leq \text{logit}[q(x)] \leq +\infty$$

Soit $\text{logit}[q(x)] = Y(x)$ alors $\hat{Y}(x)$ la prédiction de la valeur de $Y(x)$ entre $-\infty$ et $+\infty$ permet de prédire la valeur de $q(x)$

Donc $\hat{q}(x) = \frac{\exp[2\hat{Y}(x)]}{1 + \exp[2\hat{Y}(x)]}$ et $\hat{p}(x) = 1 - \hat{q}(x) = \frac{1}{1 + \exp[2\hat{Y}(x)]}$

Modèle (d'origine) de W.Brass $\hat{Y}(x) = \alpha + \beta \cdot Y^s(x)$ où $Y^s(x)$ – un standard quelconque

Modification de Ewbank, Gomez de Leon et Soto (1983)^(*)

quand λ et $\kappa \rightarrow 0$, ce modèle s'approche de sa version classique. L'augmentation du score de λ et de κ respectivement augmente la survie aux jeunes âges ou la diminue aux âges élevés

$$T^S(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} & \text{quand } p^s(x) \geq 0,5; \\ \text{sinon} & \\ \frac{1 - \left(\frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\lambda}{2 \cdot \lambda} & \text{quand } p^s(x) < 0,5; \end{cases}$$

^(*)Ewbank D.C., J.C.Gomez de Leon, M.A. Soto (1983) – "A Reducible Four-parameter System of Model Life Tables" *Population Studies*. V.37, no 1, p.105-127

23

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

Tables de mortalité construites à partir de logit système (standard général de Brass)

$\alpha=0$

$\beta=1$

Application pour les projections:

1. Choisir le standard (critères: la qualité des données et similarité avec la population à projeter)
2. Analyser la dynamique des paramètres α et β (tendance, régression, etc.)
3. Calculer les tables de mortalité

24

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

5 Nouvelles tables type des Nations Unies pour les pays en voie de développement (1982)

United Nations (1982) – *Model Life Tables for Developing Countries*. NY, United Nations, Population Studies, no. 77

Données de base: initialement 286 (143+143) tables de mortalité (54 – Afrique, 50 – Amérique Latine, 39 – Asie), après la sélection seulement 72 tables ont été retenues (dont une de l'Afrique – Tunisie)

Principe de construction:

- 1) sélection et classification des tables en appliquant la procédure de Coale-Demeny,
- 2) analyse de composants principaux et
- 3) approche relationnelle de W.Brass pour déterminer les paramètres du modèle dans chaque classe (cluster).

Structure: 4 familles de tables régionales sont retenues; elles sont dérivées du modèle à un paramètre ($k=1$) avec e_{10} comme entrée unique et la possibilité de modifier le scénario de mortalité en modifiant les autres paramètres du modèle de base.

$$\logit {}_n q_x = U_{0x}^C + \sum_{i=1}^k a_i \cdot U_{ix}^C$$

U_{0x}^C – le standard ou la moyenne pour la famille C
 U_{ix}^C – les caractéristiques de la déviation du standard C
 a_i – l'ampleur de la déviation du standard

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

25

Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Nations Unies 1983

Type « Amérique Latine »

Donnée de base: Tables en provenance de l'Amérique Latine, Philippines, Sri Lanka et Thaïlande

Particularités: la mortalité juvénile et la mortalité des jeunes adultes sont extrêmement hautes, en revanche la mortalité infantile et la mortalité aux âges élevés est relativement basse

Type « Chili »

Donnée de base: Chili (1950, 1960, 1970)

Particularités: la mortalité infantile est très élevée à cause (probablement) des maladies respiratoires

Type « Asie du Sud »

Donnée de base: Tables en provenance des pays d'Asie du Sud, d'Asie de l'Ouest et de Tunisie

Particularités: la mortalité est forte aux âges jeunes et aux âges élevés

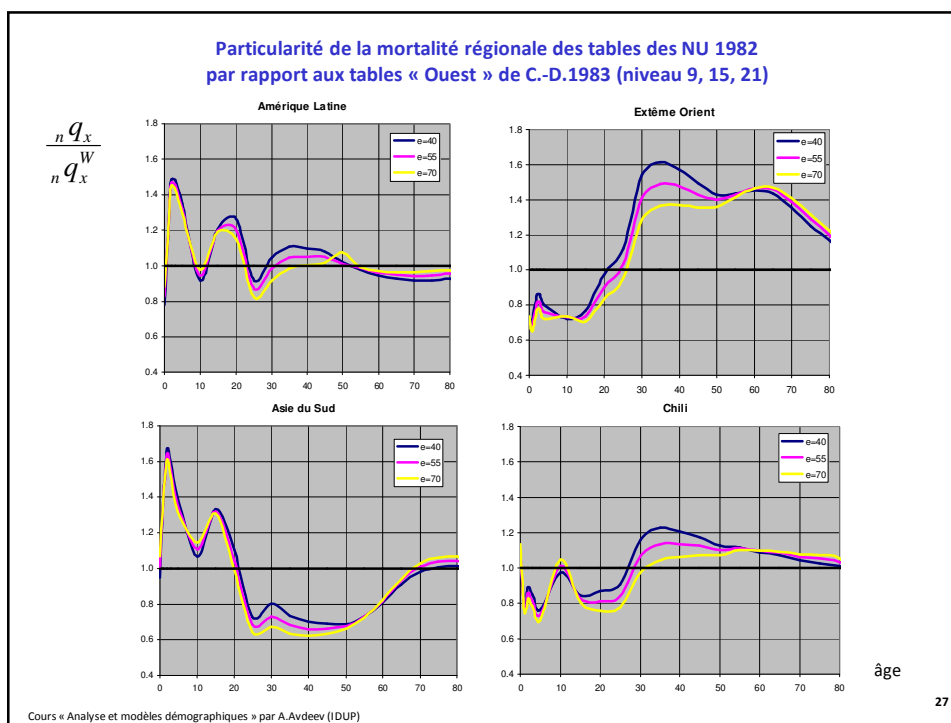
Type « Extrême Orient »

Donnée de base: Tables en provenance des pays d'Asie de l'Est mais aussi de la Malaisie, de la Guyane et de Trinidad et Tobago

Particularités: la mortalité est forte après l'âge 40 et surtout parmi les personnes âgées, probablement à cause de la tuberculose et de l'hépatite B.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

26



27

Modifications et perfectionnement récents des tables type de mortalité (UN version 2010)

World Population Prospects 2010: Extended Model Life Tables

« With the extension of the projection horizon for all countries up to 2100 as part of the 2010 revision of the UN *World Population Prospects*, it was necessary to allow life expectancy at birth to go beyond 92.5 years. In addition, in-depth analysis of the initial 1998 extension revealed substantial deviation for out-of-sample predictions compared to the Human Mortality Database experience at very low mortality levels (especially for Coale-Demeny models, see Figure 1 in Willmoth et al., 2009), and the need to improve a smoother transition between the existing set of model life tables up to age 75 and their extension. A new set extended model life tables was computed in Spring 2010 by staff of the Population Division (Gerland and Li) based on the modified Lee-Carter approach. After extensive cross-validation against the Human Mortality Database (HMD) performed by Kirill Andreev some constraints have been imposed to ensure some convergence toward the HMD mortality experience at high levels of $e(0)$. The nine families of model life tables extended up to $e(0)=100$ were smoothly blended to the existing ones to insure smooth mortality surfaces by age and sex and $e(0)$ levels. »

De nouvelles tables type de mortalité sont téléchargeables à partir
<http://esa.un.org/wpp/Model-Life-Tables/download-page.html>

Literature: Li, N. and P. Gerland (2011). "Modifying the Lee-Carter Method to Project Mortality Changes up to 2100"
 Paper presented at the 2011 Annual Meeting of the Population Association of America (PAA) in Session
 125: Formal Demography I: Mathematical Models and Methods on Friday 1 April -
<http://paa2011.princeton.edu/sessionViewer.aspx?sessionId=1002>

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

28