UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE
OMNIBUS SAPIENTIA UNICUIQUE EXELLENTIA

Institut de démographie

IDUP

Cours d'analyse démographique 2 (Modèles de populations)

Diplôme : Master de démographie

Chapitre 9

Fécondité et comportement procréateur: approche de modélisation

"As mortality in the world declines, fertility becomes, more and more, the primary determinant of population growth and structure. Recognition of this situation has spurred interest in documenting levels of fertility and causes of changes in birth rates throughout history and in investigating how rates might change in the future."

Jane A. Menken "Biometric Models of Fertility", *Social Forces*, Vol. 54, No. 1 (Sep., 1975), pp. 52-65

I. Modèles basés sur la théorie du cycle de vie et de reproduction (« modèles de composants »)
II. Modèles de distribution par âge de la nuptialité et de la fécondité

1

I. Modèles basés sur la théorie du cycle de vie et de reproduction (« modèles de composants »)

facteur de la fécondité; fécondité en mariage et fécondité « générale »; prise en considération de la variation du comportement en fonction de l'âge; limitation délibérée de naissances (planification familiale); « Indices de Coale » (ou indices de Princeton) et leur application aux recherches historiques; déterminants intermédiaires de la fécondité: approche agrégée et par âge

2

Première approche : indices de réduction de la fécondité

Une décomposition du nombre de naissances de la période *t* :

Soit :

B(t) – nombre de naissances de l'année *t* ;

W(t) – nombre de femmes 15-49 de l'année *t* (population exposée = nombre d'années vécues) ;

M(t) – nombre de femmes mariées 15-49 de l'année *t* (nombre d'années vécues en mariage) ;

O(t) – nombre de mères âgées (femmes ayant au moins un enfant) de 15 à 50 ans de l'année *t* ;

$$B(t) = W(t) \cdot \frac{M(t)}{W(t)} \cdot \frac{O(t)}{M(t)} \cdot \frac{B(t)}{O(t)} \cdot \qquad (1)$$

Le nombre de naissance est un produit de :

- d'un nombre de femmes âgées de 15 à 50 ans (l'effet de la structure par âge) ;
- d'une proportion de femmes mariées de 15-49 ans (l'effet de la nuptialité) ;
- d'une proportion de mères mariées de 15-49 ans (les effets du calendrier de naissances et de l'infécondité) ;
- d'un nombre moyen de naissance par une mère (proportion, des mères qui ont eu une naissance durant l'année en question ajustée des naissances multiples ➔ capte l'effet de la fécondation)

Une image de la fécondité des années 1950 : toutes les naissances sont les produits des mariages.

Un de premier exemple d'analyse exhaustive de la fécondité :

W.H. Grabill, C.V.Kiser, P.K .Welpton (1958) *The Fertility of American Women.* NY : John Wiley & Sons, NY; Capman & Hall, London. (Census monograph series), 448 p.

3

Développement du modèle (1) aux fins explicatives et des prévisions

Soit :

B(t) – nombre de naissances de l'année *t* ;

W(t) – nombre de femmes 15-49 de l'année *t* (population exposée = nombre d'années vécues) ;

M(t) – nombre de femmes mariées 15-49 de l'année *t* (nombre d'années vécues en mariage) ;

O(t) – nombre de mères âgées (femmes ayant au moins un enfant) de 15 à 50 ans de l'année *t* ;

$$B(t) = W(t) \cdot \frac{M(t)}{W(t)} \cdot \frac{O(t)}{M(t)} \cdot \frac{B(t)}{O(t)} \quad \Rightarrow \quad B(t) = W(t) \cdot I_m(t) \cdot I_i(t) \cdot I_{fm}(t)$$

I_m – Indice de la nuptialité (de proportion des mariées/en couple = indice d'exposition)

I_i – Indice de l'infécondité (la proportion de femmes effectivement fécondes)

I_{fm} – Indice de fécondité des mères

soit $\boldsymbol{TFG} = \frac{\boldsymbol{B(t)}}{\boldsymbol{W(t)}}$ taux de fécondité générale ➔ $TFG(t) = I_m(t) \cdot I_i(t) \cdot I_{fm}(t)$

$$\frac{TFG(t+1)}{TFG(t)} = \frac{I_m(t+1)}{I_m(t)} \cdot \frac{I_i(t+1)}{I_i(t)} \cdot \frac{I_{fm}(t+1)}{I_{fm}(t)}$$

Interprétation : la variation de la natalité s'explique par la variation des facteurs suivants :

- la nuptialité (exposition)
- l'infécondité (pathologique et volontaire)
- la fécondité des mères (taille idéale de la famille)

Version finale :

soit le Taux Brut de Natalité → $\boldsymbol{TBN(t)} = \frac{\boldsymbol{B(t)}}{\boldsymbol{P(t)}}$ et la proportion des femmes 15-49 ans → $\boldsymbol{w(t)} = \frac{\boldsymbol{W(t)}}{\boldsymbol{P(t)}}$

$$TBN(t) = TFG(t) \cdot w(t) \qquad \frac{B(t+1)}{B(t)} = \frac{P(t+1)}{P(t)} \cdot \frac{w(t+1)}{w(t)} \cdot \frac{I_m(t+1)}{I_m(t)} \cdot \frac{I_i(t+1)}{I_i(t)} \cdot \frac{I_{fm}(t+1)}{I_{fm}(t)}$$

4

Prise en considération de la variation des mariages et des naissances par âge

Le modèle (1) repose sur **une hypothèse** sous-jacente **que la nuptialité et la fécondité par âge sont homogènes** et qu'il n'y a aucune interférence entre elles, ce que n'est pas toujours vrai.

En effet, **les mariages pourraient être plus féconds dans les âges où ils sont rares** (âges jeunes), et **moins féconds dans les âges où les mariages son universels** (après 40 ans). Pour surmonter l'inconvénient de cette hypothèse (homogénéité) il faudrait introduire une notion d'âge dans le modèle

Soit:

la fécondité hors mariage = 0

x – l'âge continu (x ∈ Z ≥ 0); ***n*** – intervalle d'âge (x ∈ N)

${}_nG_x$ – la proportion des femmes mariées dans l'intervalle d'âge de *x* à *x+n*

${}_nf_x^L$ – taux de fécondité « légitime » (des femmes mariées)

TFT – taux de fécondité totale (indice synthétique de fécondité)

TFTM – taux de fécondité totale en mariage

Sachant que ${}_nf_x = {}_nf_x^L \cdot {}_nG_x$

$$\frac{TFT}{TFTM} = \frac{n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta} {}_nf_x^L \cdot {}_nG_x}{n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\beta} {}_nf_x^L} = \sum_{x=\alpha}^{\beta} \left(\frac{{}_nf_x^L}{\sum_{x=\alpha}^{\beta} {}_nf_x^L} \right) \cdot {}_nG_x = I_g \qquad (2)$$

Dans ce modèle (2) le rapport ***TFT/TFTM*** n'est qu'une **proportion moyenne des femmes mariées pondérée** par les taux de la fécondité en mariage/par les éléments de calendrier

Ainsi on peut présenter le niveau de fécondité (***TFT***) comme le produit (une fonction) du niveau de la fécondité des mariages (***TFTM***) et du niveau de la nuptialité (***I_g***).
L'interférence entre les structures de la fécondité et de la nuptialité par âge est intégrée dans ce modèle.

➔ $TFT = TFTM \cdot I_g$

COMPOSANT DE VARIATION DE LA FÉCONDITÉ LORS DE LA TRANSITION DÉMOGRAPHIQUE PROJET DE PRINCETON ET LES INDICES DE COALE

Approche relationnelle et développement du modèle avec la prise en considération du comportement procréateur : *Indices de Coale ou de Princeton*

Coale, Ansley J. (1969) – «The decline of Fertility in Europe from the French Revolution to World War II» in S.B.Behrman, L.Corsa and R.Freedman, eds., *Fertility and Family Planning: A World View.* Ann Arbor: University of Michigan Press

Coale, Ansley J.; Watkins, Susan Cotts [editors]. *The Decline of Fertility in Europe: the Revised Proceedings of a Conference on the Princeton European Fertility Project*. Princeton University Press, 1986.

Problème : quantifier (mesurer) la réduction générale de la fécondité et des ses facteurs

Approche : décomposition avec une standardisation indirecte (comparer avec un standard)
soit

1) B – le nombre (annuel) de naissance dans une population observée
2) W_i – la distribution par âge (***i***) des femmes (***W***)dans cette population
3) f_i – la densité de distribution de la fécondité (taux par âge) dans cette population
4) H_i – une distribution de la fécondité étalon supposée d'être maximale (fécondité type dans la communauté ***Huttérite*** ou des femmes canadiennes de XVII siècle)

Solution : on mesure le degré de la réduction de la natalité comme un rapport entre le nombre de naissances enregistrées et celui maximal possible ➔

$$I_f = \frac{B}{B_{\max}} \rightarrow I_f = \frac{B}{\sum_{x=1}^{I} H_i \cdot W_i} = \frac{\sum_{x=1}^{I} f_i \cdot W_i}{\sum_{x=1}^{I} H_i \cdot W_i} \qquad (3)$$

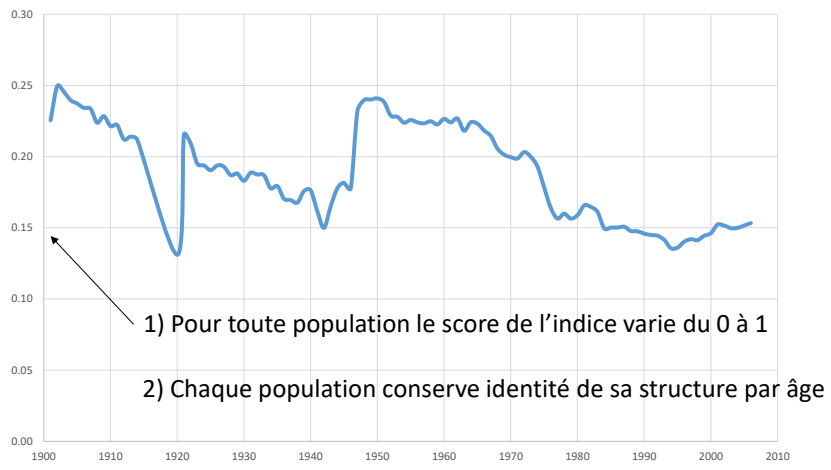
Indice de fécondité générale
(plutôt l'indice des naissances standardisée par âge)

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 7

7

Dynamique de l'indice de la fécondité générale en France 1901-2006

Faudrait-il dire en français : « indice générale de réduction de la natalité » ?



Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 8

8

Indices de Coale (suite) :
Introduction de la limitation délibérée des naissances en mariage

Soit

1) B^L – le nombre (annuel) de naissance légitimes (en mariage) dans une population observée
2) W_i^L – la distribution par âge des femmes mariées dans cette population
3) f_i^L – la densité de la fécondité légitime dans cette population (taux de fécondité)
4) H^L – une densité de la fécondité supposée d'être maximale dans une population de référence (Huttérite, femmes canadiennes de XVII siècle, etc.)
5) *la fécondité hors mariage = 0 dans la population observée*

Alors ➔ $$\sum_{i=1}^{I} f_i \cdot W_i = B = B^L = \sum_{i=1}^{I} f_i^L \cdot W_i^L$$

et on peut réécrire l'équation (3)

$$I_f = \frac{\sum_{i=1}^{I} f_i^L \cdot W_i^L}{\sum_{i=1}^{I} H_i \cdot W_i^L} \times \frac{\sum_{i=1}^{I} H_i \cdot W_i^L}{\sum_{i=1}^{I} H_i \cdot W_i} = I_g \cdot I_m$$

Indice de fécondité générale est donc décomposé comme un produit de **l'indice de fécondité légitime** (I_g) et **l'indice de proportion des mariées** (I_m)

Ajustement des naissances hors mariage 'naissances illégitimes'

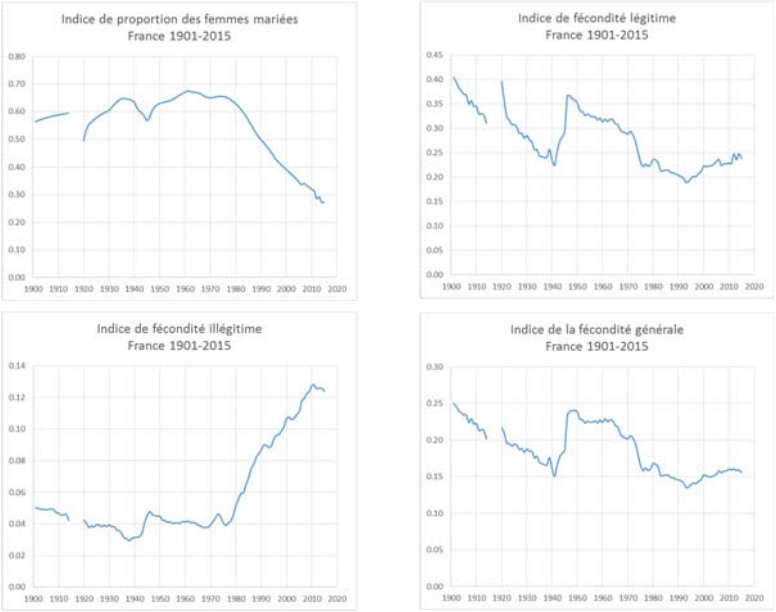
On imagine l'indice de fécondité générale comme une moyenne de l'indice de fécondité légitime (I_g) et l'indice de fécondité illégitime (I_h) pondérés par l'indice de proportion des femmes mariées (I_m)

$$I_f = I_g \cdot I_m + I_h \cdot (1 - I_m)$$

où l'indice de fécondité illégitime est un rapport entre les nombres observé et espéré des naissances hors mariage :

$$I_h = \frac{B - B^L}{\sum_i H_i \cdot \left(W_i - W_i^L\right)}$$

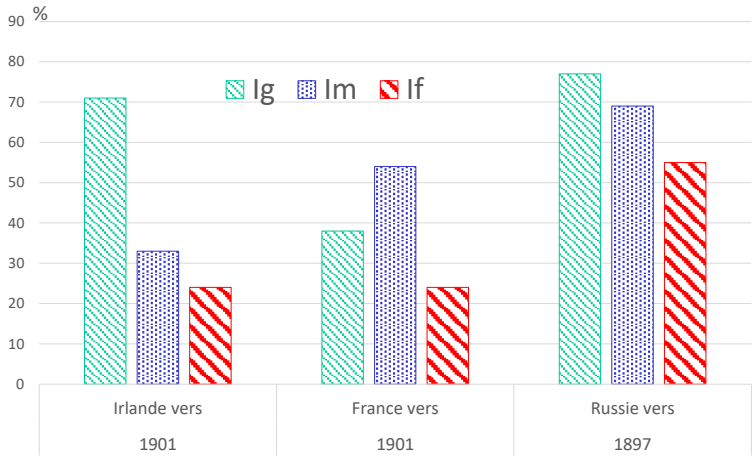
Facteurs de la dynamique de fécondité en France en 1901-2015 (en termes des indices de Coale)



Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 11

11

Trois situations (« stratégies »), illustrées par les indices de Princeton



Source : Van de Walle, « Nouvelles attitudes devant la vie: la limitation des naissances. » //HPE, v.2,p.151

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 12

12

Indices de Coale (récapitulatif)

$$I_f = I_g \cdot I_m + I_h \cdot (1 - I_m)$$

indice de la fécondité générale → $I_f = \dfrac{\text{Nombre total des naissances}}{\text{Nombre espéré des naissances}}$

indice de la nuptialité → $I_m = \dfrac{\text{Nombre espéré des naissances "légitimes"}}{\text{Nombre espéré des naissances}}$

indice de la fécondité légitime → $I_g = \dfrac{\text{Nombre des naissances "légitimes"}}{\text{Nombre espéré des naissances "légitimes"}}$

indice de la fécondité illégitime → $I_h = \dfrac{\text{Nombre des naissances "illégitimes"}}{\text{Nombre espéré des naissances chez les femmes non mariées}}$

« Nombre espéré » est celui qui pourrait observé en absence de toute limitation volontaire de naissances

Exemple : Hubert Charbonneau (1970) *Tourouvre-au-Perche aux XVIIe et XVIIIe siècles*, Paris, PUF

i	Age	W^L_i	W_i	H_i	$(H_i) \times (W^L_i)$	$(H_i) \times (W_i)$
1	15-19	1	73	0.300	0.3	21.9
2	20-24	19	87	0.550	10.5	47.9
3	25-29	33	49	0.502	16.6	24.6
4	30-34	58	66	0.447	25.9	29.5
5	35-39	48	56	0.406	19.5	22.7
6	40-44	42	56	0.222	9.3	12.4
7	45-49	37	51	0.061	2.3	3.1
				Somme	84.3	162.1

Nombre de naissance en 1801 (B = 59)

$$I_f = \frac{59}{162{,}1} = 0{,}364\,;$$

$$I_g = \frac{59}{84{,}3} = 0{,}700\,;$$

$$I_m = \frac{84{,}3}{162{,}1} = 0{,}520$$

On voit que $I_f = I_g \times I_m = 0{,}7 \times 0{,}52 = 0{,}364$

Exercice : 1) calculez le taux de fécondité totale dans la population standard ;

2) commentez le comportement procréateur dans ce village en 1801

Le nombre de naissances observé est réduit de 64% par rapport à celui qu'on pourrait espérer observer en absence de toute limitation des naissances, qu'elle soit par mariage ou par l'utilisation des moyens de prévention des naissances.
On voit que le poids de réduction de la nuptialité est plus important que celui de limitation de taille de famille (plus le score de indice est proche à 1, moins son influence est important.
Ici le poids de la nuptialité est 65% et le poids de la limitation volontaire de naissance est 35%

NOTION DE LA FÉCONDITÉ « NATURELLE » ET LES PROBLÈMES DE SON ESTIMATION À PARTIR DES OBSERVATIONS ET DONNÉES HISTORIQUES

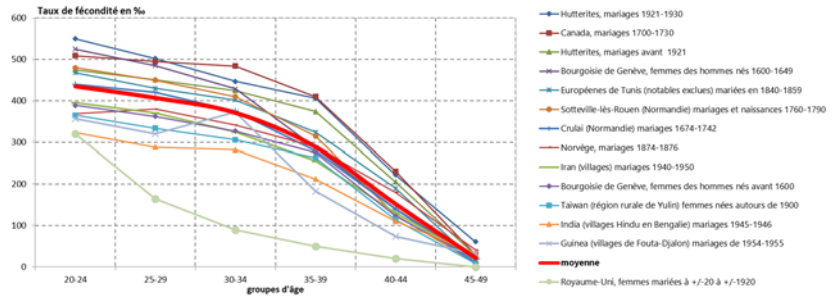
« Parmi les problèmes de la démographie celui de la détermination de la fécondité naturelle, c'est-a-dire de la fécondité qu'aurait telle population humaine si elle ne faisait aucun effort conscient pour limiter les naissances, est l'un des plus intéressants et l'un des plus difficiles »

Louis Henry, 1953

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 15

15

Taux de fécondité naturelle historique collectés par L. Henry



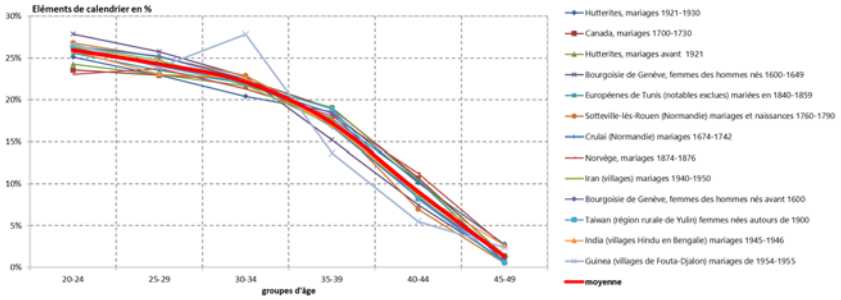
Population	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	TFT
Huttérites, mariages 1921-1930	550	502	447	406	222	61	10.9
Canada, mariages 1700-1730	509	495	484	410	231	30	10.8
Huttérites, mariages avant 1921	475	451	425	374	205	29	9.8
Bourgeoisie de Genève, femmes des hommes nés 1600-1649	525	485	429	287	141	16	9.4
Européennes de Tunis (notables exclues) mariées en 1840-1859	468	430	402	324	190	13	9.1
Sotteville-lès-Rouen (Normandie) mariages et naissances 1760-1790	480	450	410	315	125	10	9.0
Crulai (Normandie) mariages 1674-1742	440	420	375	280	140	10	8.3
Norvège, mariages 1874-1876	369	380	341	289	180	41	8.0
Iran (villages) mariages 1940-1950	395	370	325	255	130	20	7.5
Bourgeoisie de Genève, femmes des hommes nés avant 1600	389	362	327	275	123	19	7.5
Taiwan (région rurale de Yulin) femmes nées autours de 1900	365	334	306	263	114	8	7.0
Inde (villages Hindu en Bengalie) mariages 1945-1946	323	288	282	212	110	33	6.2
Guinée (villages de Fouta-Djalon) mariages de 1954-1955	357	320	373	183	74	32	6.7
moyenne	435	407	371	289	152	22	8.4
Royaume-Uni, femmes mariées à +/-20 à +/-1920	320	165	90	50	20	0	3.2

Henry, Louis. 1961. "Some data on natural fertility." *Eugenics Quarterly*. 1961, N°8 p.81-91; / *Social Biology*, vol.29, n° 1-2, p.146-156 (tableau sur la page 148)

16

16

Fécondité naturelle collectés par L. Henry et réduite aux éléments de calendrier



Population	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	total
Huttérites, mariages 1921-1930	25%	23%	20%	19%	10%	3%	100%
Canada, mariages 1700-1730	24%	23%	22%	19%	11%	1%	100%
Huttérites, mariages avant 1921	24%	23%	22%	19%	10%	1%	100%
Bourgeoisie de Genève, femmes des hommes nés 1600-1649	28%	26%	23%	15%	7%	1%	100%
Européennes de Tunis (notables exclues) mariées en 1840-1859	26%	24%	22%	18%	10%	1%	100%
Sotteville-lès-Rouen (Normandie) mariages et naissances 1760-1790	27%	25%	23%	18%	7%	1%	100%
Crulai (Normandie) mariages 1674-1742	26%	25%	23%	17%	8%	1%	100%
Norvège, mariages 1874-1876	23%	24%	21%	18%	11%	3%	100%
Iran (villages) mariages 1940-1950	26%	25%	22%	17%	9%	1%	100%
Bourgeoisie de Genève, femmes des hommes nés avant 1600	26%	24%	22%	18%	8%	1%	100%
Taiwan (région rurale de Yulin) femmes nées autours de 1900	26%	24%	22%	19%	8%	1%	100%
Inde (villages Hindu en Bengalie) mariages 1945-1946	26%	23%	23%	17%	9%	3%	100%
Guinée (villages de Fouta-Djalon) mariages de 1954-1955	27%	24%	28%	14%	6%	2%	100%
moyenne	26%	24%	22%	17%	9%	1%	100%
Royaume-Uni, femmes mariées à +/-20 à +/-1920	25%	23%	20%	19%	10%	3%	100%

Henry, Louis. 1961. "Some data on natural fertility." *Eugenics Quarterly*. 1961, N°8 p.81-91; / *Social Biology*, vol.29, n° 1-2, p.146-156 (tableau sur la page 148)

17

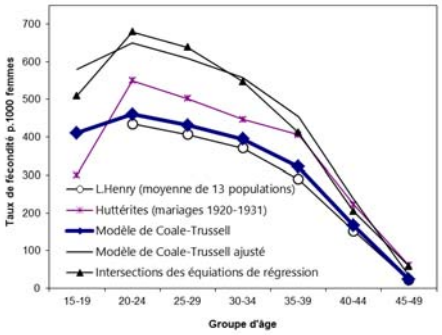
17

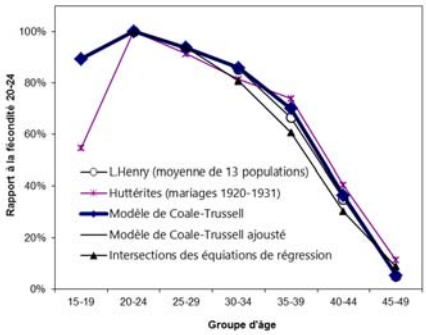
Les modèles statistiques s'ajustent bien au schéma de la fécondité « naturelle »

Louis Henry (1953) "Fondements théoriques des mesures de la fécondité naturelle", *Revue de l'Institut International de la Statistique*, 1953, vol.21, n°3, p.135-252

Les variantes de schéma de la fécondité naturelle :

le niveau – à gauche et la structure relative – à droite





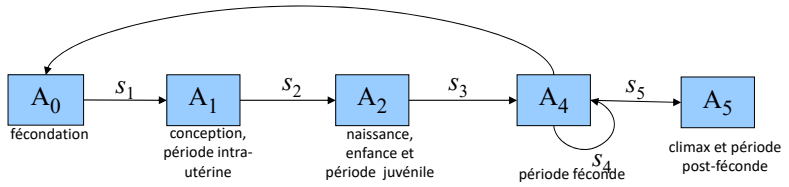
Sources : Henry, Louis. 1961. "Some data on natural fertility." *Eugenics Quarterly*. 1961, N°8 p.81-91; Coale A.J. and T. James Trussell – "Model fertility schedules: variations in the age of childbearing in human population" – *Population Index*, vol.40, no.2 (April 1974), p.185-258; Bongaarts John and Sharon Kirmeyer – *Estimating the Impact of Contraceptive Prevalence on Fertility: Aggregated and Age-specific Versions of a Model* Population Council, Center for Policy Studies, Working Paper No.63, December 1980.

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 18

18

Cycle de reproduction
(et les facteurs de la fécondité naturelle)

$$\mathcal{F} = \sigma \ \gamma \ \varphi \ s$$



s_i – probabilité de survie dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}) ;
s_f – survie des fœtus *(entre la conception et la naissance)*;
φ – fertilité *(fécondité naturelle)* ;
γ – probabilité d'accouplement ;
σ – le rapport des sexes à la naissance *(à la conception)* ;

} Déterminants ou « facteurs » de la fécondité

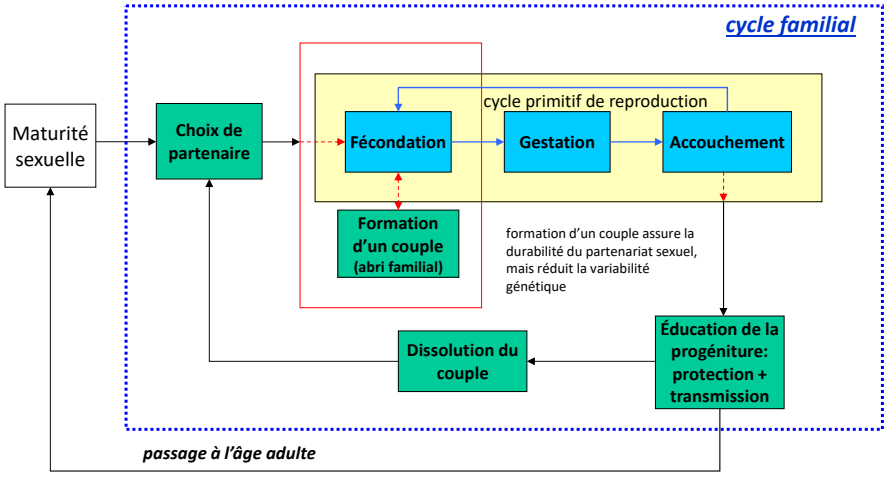
Idées de base pour modélisation :

1) définir les méthode de mesure (indices) pour les déterminants de la fécondité;
2) estimer les score de chaque déterminant dans chaque population à étudier;
3) classer les population sur une échelle de scores des déterminants de la fécondité

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 19

19

Modèle basé sur la structure du cycle de vie : processus démographiques comme transitions entre les états

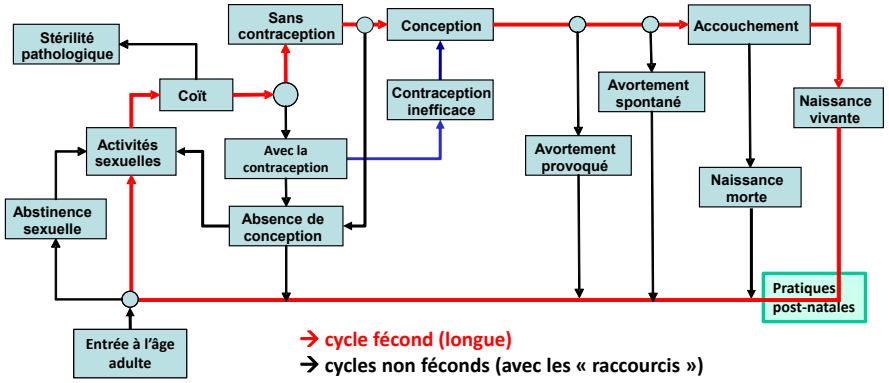


– éléments à caractère plutôt biologique – éléments à caractère plutôt social

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 20

20

Rappel : Les cycles de reproduction et les champs d'études sur la fécondité (facteurs de la fécondité)



→ cycle fécond (longue)
→ cycles non féconds (avec les « raccourcis »)

Chaque type de parcours dans ce cycle nécessite une période de temps minimale → On peut estimer le niveau de la fécondité en rapportant la durée moyenne de la vie féconde à la durée moyenne d'un cycle fécond allongée avec les période infertile et non féconde

Objectifs de l'étude empirique → estimer les distributions des périodes d'attente de chaque événement du cycle, ou la probabilité (ou quotients), la densité moyenne de probabilité (taux) d'un éventement durant une période déterminée.

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 21

21

Composants bio-sociaux de la fécondité humaine 'naturelle'

Fréquence des naissances est une fonction inverse de l'intervalle entre les naissances

L'intervalle (moyen) entre les naissances est composé de :

5-10 mois : une ***période d'attente de la fécondation*** (la durée moyenne d'une période entre l'ovulation normal et conception) ;

~9 mois : la ***durée moyenne de grossesse*** ;

3-24 mois : une ***période inféconde après l'accouchement*** (période anovulatoire) liée à la durée et l'intensité d'allaitement ;

1-2 mois : les ***pertes moyennes à cause des avortements spontanés***, fausses couches et mortalité fœtale (en moyenne une conception sur cinq n'arrive pas à bon terme).

L'intervalle minimal = 5 + 9 + 3 + 1 = 18 mois (1,5 d'année)

L'intervalle maximal = 10 + 9 + 24 + 2 = 45 mois (3,75 d'année)

Sans parler des possibilités du contrôle délibéré de la fécondité (recours à la contraception et à l'avortement provoqué)

La durée de la période de l'âge fécondé effectivement utilisée pour la procréation :

Age moyen de premier mariage (de 15 à 25 ans)

Age de ménopause (50 ans, de fait, la procréation s'arrête à 38-41 ans)

La durée minimale = 40 – 25 = 15 ans → 15 ans/3,75 ans (intervalle max. entre les naissances) = **4 enfants**

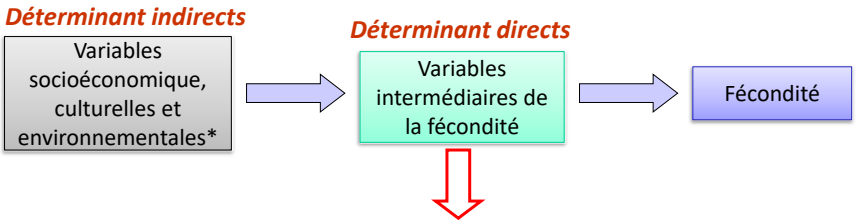
La durée maximale = 40 – 15 = 25 ans → 25 ans/1,5 ans (intervalle min. entre les naissances) = **16,6 enfants**

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 22

22

Cadre théorique initiale de la décomposition

Kingsley Davis and Judith Blake (1956) – « Social Structure and Fertility: An Analytic Framework » *Economic Developement and Cultural Change*, Vol. 4, no 3, (Apr., 1956), p.211-235



I. Facteurs affectant l'exposition aux rapports sexuels (« Intercours variables / variables de rapports »)
II. Facteurs affectant l'exposition à la conception (« Variables de conception »)
III. Facteurs affectant la gestation et le succès de la accouchement (« Variables de gestation)

*) Revue historique : approches bio-sociale de Gerbert Spenser (1820-1903), cf. *Principles of Biology,* 1864 2 volumes ; « capillarité sociale » d'Arsène Dumont (1849-1902) cf. *Dépopulation et civilisation*, 1890

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 23

23

I. Facteurs affectant l'exposition aux rapports sexuels (intercours variables) :

A. Facteurs déterminant la formation et la dissolution des union durant aux âges reproductifs :
   1) Age de début des unions sexuelles
   2) Célibat définitif (proportion des femmes n'ayant jamais aucun rapport sexuel)
   3) Partie de la période reproductive dépensée entre les unions et après les unions
      a. Quand les unions se terminent par le divorce, la séparation ou la désertassions
      b. Quand les unions se terminent par le décès d'un des conjoints

B. Facteurs de l'exposition aux rapports sexuels au sein des unions :
   4) Abstinence volontaire
   5) Abstinence involontaire : impuissance, maladies, séparations inévitables mais temporaires
   6) Fréquence des rapports sexuels (en dehors des périodes d'abstinence)

De fait, il s'agit d'estimation du nombre d'années vécues sous le risque de conception

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 24

24

II. Facteurs affectant l'exposition à la conception (variables de conception) :

7) Fertilité versus l'infécondité involontaire (dépend de l'état de santé)
8) Recours ou non recours aux méthodes de contraception :
   a. Méthodes mécaniques et chimiques
   b. Autres méthodes (p.ex. « méthodes naturelles », retrait, toute sorte de simulation sans pénétration etc.)
9) Fertilité et infécondité volontaire (stérilisation, subincision, traitement médical etc.)

III. Facteurs affectant la gestation et le succès de la parturition (variables de gestation) :

10) Mortalité fœtale spontanée (involontaire)
11) Mortalité fœtale provoquée (volontaire)

Variables intermédiaires

(une modification instrumentalisée de John Bongaarts) :

Bongaarts, John (1978) "A Framework for Analyzing the Proximate Determinants of Fertility" *Population and Development Review*, Vol.4, no 1, (March 1978), p.105-138

Onze variables interprétables initiales sont réduites à huit variable « mesurables » :

I. Facteurs d'exposition :
   1. Proportion de femmes mariées (mariage = toute union sexuelle)

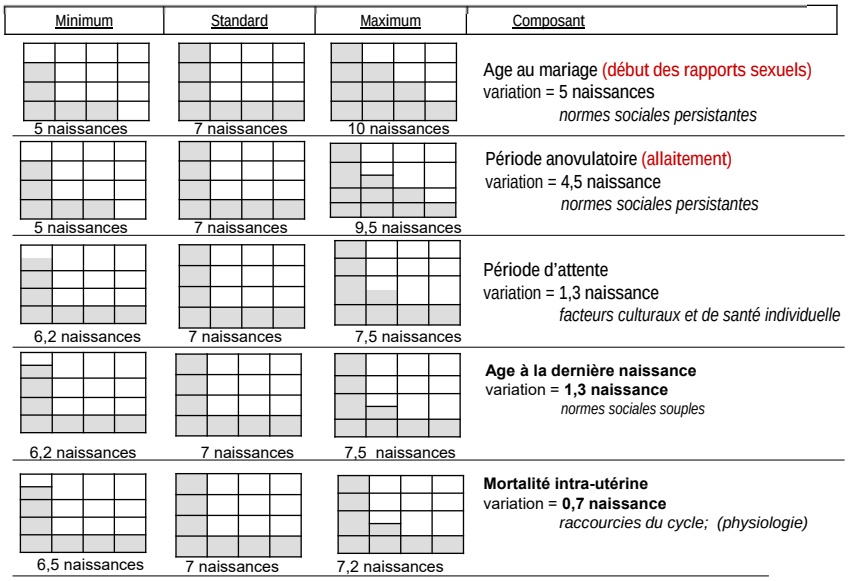
II. Contrôle délibéré de la fécondité :
   2. Contraception
   3. Avortements provoqués

III. Facteurs de la fécondité naturelle :
   4. Infécondité post-partum (récupération et allaitement)
   5. Fréquence des rapports sexuels
   6. Stérilité (infécondité)
   7. Mortalité intra-utérine spontanée
   8. Durée de la période fertile

Les facteurs « majeurs » (à étudier en priorité) sont ceux qui expliquent plus de variation du niveau de fécondité

Cette approche a cependant été déjà conçue et développée par L.Henry et H.Leridon. Voir notamment **Leridon, Henri (1973)** *Aspects biométriques de la fécondité humaine*. - (INED série "Travaux et documents" ; Cahier n° 65), Paris : PUF. , XII-184 p.

Effet de la variation des composants de l'intervalle entre les naissances sur la descendance finale par rapport à un standard (simulations)



Bongaarts J. and J. Menken – "The supply of children: A Critical Essay". In: *Determinants of Fertility in Developing Countries*., ed. R. A. Bulatao and R. B. Lee. Academic Press, NY, 1983, Vol.1, p. 27-30.

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 27

27

Modèles de comportement procréateur et les niveaux de fécondité

#	Naissance par femme	Espace utilisée	Caractéristiques bio-sociales	Population	Populations historiques
1	16	100%	Maximum biologique	Théorétique	Aucune (cas individuels)
2	11,4	71%	Mariages précoces, intervalles minimales	Certains groups isolés	Français canadiens nés avant 1660
3	9	56%	Mariages tardifs, intervalles minimales	Certains groups isolés	Huttérites canadiens, 1926-30 (8,5)
4	7,5	47%	Mariages précoces, intervalles longs	Beaucoup de population des pays en voie de développement	Égypte, 1960-65 (7,1)
5	7	44%	Standard (Moyenne)	---	---
6	5	31%	Mariages tardifs, intervalles longs	Beaucoup de populations européennes en XVIII-XIXe s.	Angleterre 1751-1800 (5,1)
7	3	19%	Contrôle délibéré des naissances (diffusion moyenne)	Populations européennes de la première moitié du 20e siècle	Italie, 1937 (3,0)
8	1	6%	Contrôle délibéré des naissances (diffusion totale)	Quelques populations européennes contemporaines	Ligurie (Italie), 1990 (1,0)

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 28

28

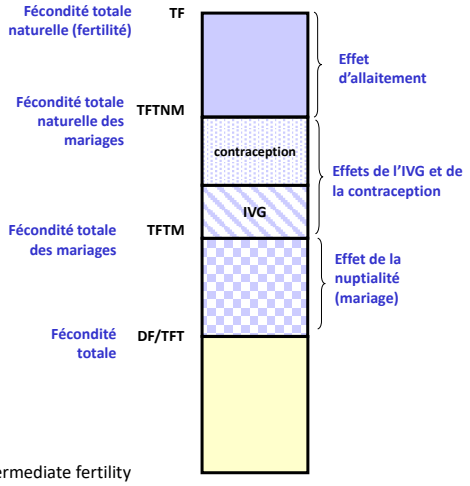
Facteurs comportementaux inhibiteurs de la fécondité humaine

TABLE 1 Rating of intermediate fertility variables with respect to sensitivity of fertility and variability among populations

Intermediate fertility variables	Sensitivity of fertility to intermediate variables	Variability among populations	Overall rating
Proportions married	+ + +	+ + +	+ + +
Contraceptive use	+ + +	+ + +	+ + +
Prevalence of induced abortion	+ +	+ + +	+ + +
Postpartum infecundability	+ +	+ + +	+ + +
Fecundability	+ +	+ +	+ +
Spontaneous intrauterine mortality	+	+	+
Permanent sterility	+ +	+	+

+ + + = High + + = Medium + = Low or absent

Une variable est moins intéressante, voir sans intérêt, si elle n'affecte pas la fécondité (colonne 1), ou si elle ne varie que peu d'une population à l'autre (colonne 2). A partir ces deux critères, les variables sont classées selon leur utilité pour le modèle (colonne 3)



J.Bongaarts (1982), The fertility inhibiting effects of the intermediate fertility variables // *Studies in Family Planning*, 13, 6/7: p.180

29

Déterminants intermédiaires de la fécondité :

Bongaarts, John (1978) "A Framework for Analyzing the Proximate Determinants of Fertility" *Population and Development Review*, Vol.4, no 1, (March 1978), p.105-138

Soit *TFT* – taux de fécondité totale (indice synthétique de fécondité, ou la descendance finale) ;

FTM – taux de fécondité totale en mariage[1)] ;

FTNM – taux de fécondité totale naturel (en mariage);

maxFTN – fécondité maximale potentielle (il est supposé qu'elle est égale à 15, 3 enfants par femme).

$$TFT = \frac{TFT}{FTM} \cdot \frac{FTM}{FTNM} \cdot \frac{FTNM}{\max FTN} \cdot \max FTN \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad TFT = Cm \cdot (Cc \cdot Ca) \cdot Ci \cdot 15{,}3$$

[1)] mariage : = toute union sexuelle

30

Modèle de Bongaarts

déterminants intermédiaires de fécondité (DIF)

$$TFT = C_m \cdot C_c \cdot C_a \cdot C_i \cdot TFN$$

C_m – un indice de proportion de femmes mariées (indice d'exposition au risque de concevoir) ;

C_c – un indice mesurant l'impact d'utilisation délibérée de la contraception ;

C_a – un indice de l'avortement provoqués ;

C_i – un indice d'effet anticonceptionnel de l'allaitement;

TFN – le taux de fécondité totale naturelle maximal (≈ 15,3)

Chaque indice peut varier du 0 (blocage total) à 1 (facteur absent)

C_m = Proportion des mariées

L'effet inhibiteur de mariage se manifeste numériquement comme une proportion moyenne de femmes mariées pondérée par les taux de fécondité en mariage par âge.

$$Cm = \frac{TFT}{TFTM} = \frac{\sum m(a) \cdot g(a)}{\sum g(a)}$$

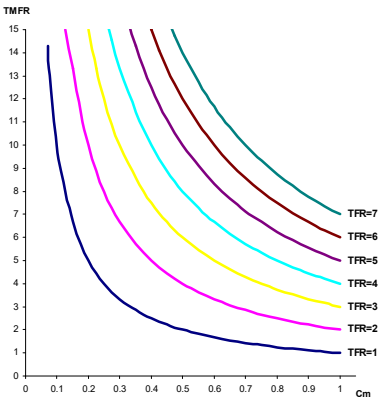
m(a) – proportion des mariées à l'âge *a*

g(a) – fécondité des mariées à l'âge *a*

Cette *approche analytique* a été développée dans projet de Princeton (indice de Coale)

$$TFT = C_m \times TFM$$

Rapport entre la fécondité générale (isoquants), la fécondité des unions (Y) et Cm (X)



Problèmes d'estimation :

1) Problème des conceptions prénuptiales et extra-nuptiale.
2) Données incertaines sur l'implication des personne dans un union sexuelle ;
3) Statistique d'état civil n'est pas suffisante (multiplicité de forme des unions) ;

C_c = indice de la contraception
(non utilisation de la contraception)

L'approche empirique : régression non linéaire à partir des données des enquêtes sur la fécondité.

$$C_c = 1 - 1{,}18 \cdot u \cdot e$$

u – une proportion des femmes utilisatrices de la contraception ;

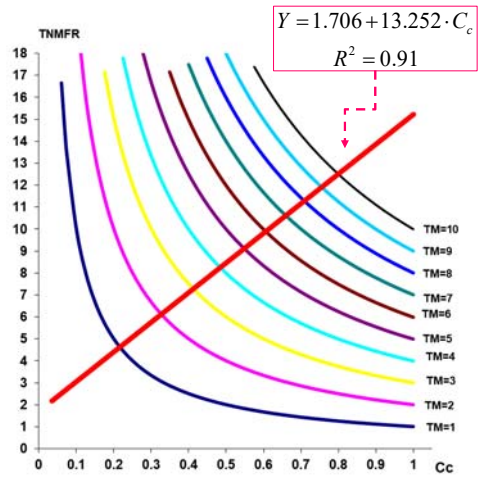
e – l'efficacité moyenne des méthodes de contraception utilisées;

1,18 ≅ 1/f, où f est la proportion moyenne des femmes fécondes.

La définition de **l'efficacité de contraception** est un problème particulier. En générale elle est mesurée soit comme le taux d'échec (**indice de Pearl**, 1933), soit à partir de table d'extinction (échec de protection)…

$$TFT = C_m \cdot C_c \cdot TNFM$$

Rapport entre la fécondité en union (isoquants), la fécondité naturelle des unions (Y) et Cc (X)



C_a = indice d'avortement

$$Ca = \frac{TFT}{TFT + A}$$

$$Ca = \frac{TFT}{TFT + 0{,}4 \cdot (1+u) \cdot TA}$$

0,4 – le quotient de la durée d'un cycle court (avortement) sur la durée d'un cycle normale (naissances vivante)

A – nombre de naissances évitées à cause de l'IVG par femme ;

TFT – taux de fécondité totale

TA – taux total des avortements ou indice synthétique des avortements = = somme des taux des avortement par âge;

u – proportion des utilisatrices de moyens contraceptifs parmi les femmes exposées (prévalence de la contraception)

Si u = 0 en absence des pratiques contraceptives, un avortement prévient 0,4 naissance *(il faut 25 avortements pour éviter 10 naissances).*

$$0{,}4 \cdot (1+u) < 1$$

Ce multiplicateur exprimant « efficacité » d'un avortement est toujours inférieur à 1, [varie de 0,4 à 0,8) puisque la durée d'une grossesse terminée par un avortement est toujours plus courte que celle aboutissant à une naissance vivantes

$$TFT = C_m \times C_c \times C_a \times TNFM$$

C_i = indice d'infécondité post-partum

Soit : 7,5 mois – la durée moyenne d'attente d'une conception

2,0 mois – les pertes moyennes de temps à cause des avortements spontanés etc. (rallonge moyenne d'un cycle féconde)

9,0 mois – la durée moyenne d'une grossesse efficace

1,5 mois – la durée moyenne de l'infécondité après accouchement (sans allaitement)

➔ sans allaitement l'intervalle minimal entre les naissances = **7,5+2+9+1,5=20 mois**

Il y a une partie constante (~18.5) et une qui peut varier en fonction de l'allaitement (en rouge) ➔

$$Ci = \frac{20}{18{,}5 + i}$$

i – la durée de l'infécondité post-partum (après l'accouchement) en mois

Problème d'estimation de « i » : soit ***L*** la durée de l'allaitement, alors

$i = 1{,}5 + 0.56 \cdot L$ ➔ Solution proposée par Carlo Cosini en 1977 lors d'un séminaire de l'IUSSP à l'INED

$i = 1{,}753 \cdot e^{0{,}1396 \cdot L - 0{,}001872 \cdot L^2}$ ➔ Une solution proposée par J. Bongaarts en 1982

$$TFT = C_m \times C_c \times C_a \times C_I \times TF$$

➔ Modèle final

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 35

35

Changement de structure de facteurs de la fécondité au cours de la transition démographique (ou la transition de fécondité)

Phase 1 : TFT > 6,0

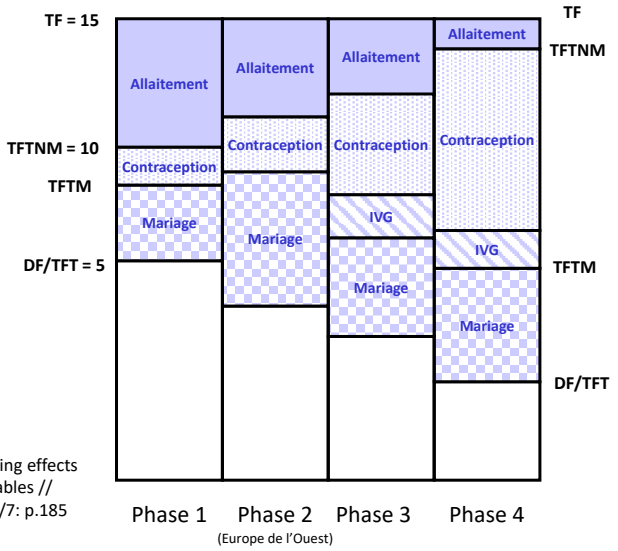
Phase 2 : TFT 4,5 – 6,0

Phase 3 : TFT 3,0 – 4,5

Phase 4 : TFT < 3,0

+ une nouvelle phase de la fécondité extrêmement faible (lowest low fertility)

TFT < 1,9



J.Bonggarts (1982), The fertility inhibiting effects of the intermediate fertility variables // *Studies in Family Planning*, 13, 6/7: p.185

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 36

36

Approche de la régression de l'utilisation de contraception sur les indicateurs de la fécondité

Bongaarts, John and Sharon Kirmeyer (1980) *Estimating of the impact of contraceptive prevalence on fertility: aggregated and age-specific version of a model*. The Population Council, Center for Policy Study Working Papers, No. 63 (December, 1980)[1)]

TABLE 1. Estimates of selected fertility measures, the prevalence and use effectiveness of contraception and the index of postpartum infecundability for 22 developing countries.

Country	Year	Total Fertility Rate	Total Marital Fertility Rate	Total Marital Fertility Rate in Absence of Lactation	Prevalence of Contraceptive Use	Use-Effectiveness of Contraception**	Index of Postpartum Infecundability***
Bangladesh	1975	6.34	7.43	13.78	.08	.82	0.539
Colombia	1976	4.57	7.91	9.41	.39	.84	0.841
Costa Rica	1976	3.69	6.46	7.06	.64	.86	0.905
Dominican Republic	1975	5.85	9.74	11.33	.32	.89	0.860
Guatemala*	1972	7.05	9.74	15.92	.03	.87	0.612
Hong Kong	1978	2.26	4.56	4.90	.72	.86	0.930
Indonesia	1976	4.69	6.64	11.51	.26	.87	0.577
Jamaica	1976	4.32	7.99	9.09	.40	.84	0.879
Jordan	1976	7.41	9.95	12.44	.24	.84	0.800
Kenya	1976	8.02	10.44	15.51	.03	.75	0.673
Lebanon*	1976	4.77	8.28	10.61	.35	.83	0.780
Malaysia	1974	4.76	7.84	8.74	.33	.85	0.897
Mexico	1976	5.73	9.40	11.18	.29	.86	0.841
Nepal	1976	6.37	7.48	13.60	.02	.94	0.550
Pakistan	1975	7.02	8.94	13.93	.05	.83	0.642
Panama	1976	4.57	7.14	8.12	.54	.90	0.879
Peru	1977	5.11	8.92	11.75	.31	.78	0.759
Philippines	1976	5.01	8.17	10.76	.35	.78	0.759
Sri Lanka	1975	3.53	6.88	11.32	.32	.84	0.608
Syria	1973	7.00	9.59	13.14	.22	.87	0.730
Thailand	1975	4.70	7.48	11.33	.33	.91	0.660
Turkey	1968	5.60	7.37	10.09	.35	.80	0.730

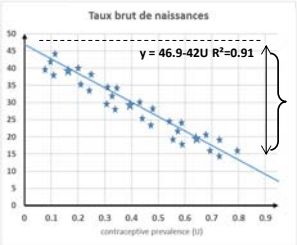
Source: See Appendix 1.

* Estimates refer to subnational units.
** Average values estimated from distributions of contraceptive methods and the following method specific effectiveness levels: sterilization 1.0, IUD 0.95, pill 0.90 and other 0.7, which are based on data from the Philippines, the only developing country with reliable estimates of method specific use effectiveness levels (see footnote 5).
*** See Appendix 2.

[1)] Publication plus récente:
Bongaarts, John and Sharon Kirmeyer (1982) "Estimating of the impact of contraceptive prevalence on fertility: aggregated and age-specific version of a model". In A Hermalin and B Entwisle, eds., *The Role of Surveys in the Analysis of Family Planning Programs*, Ordina Editions, Lièges, Belgium, 1982, pp. 381-408

37

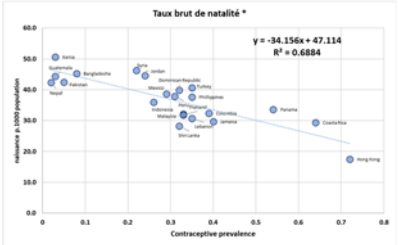
Régression des indicateurs de la fécondité sur la prévalence de la contraception (*u*)



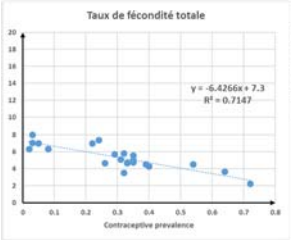
Graphique fictif par AAA à partir de l'équation de D.Nortman and E. Hofstatter, *Population and Family Planning Programs: Data Through 1978* (tenth edition), Population Council New York, 1980

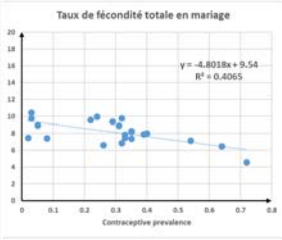
Effet de tous les facteurs réducteurs de la natalité (structure, nuptialité, contraception, avortement)

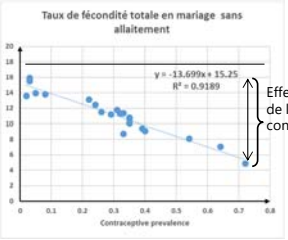
La corrélation est très forte, mais elle n'explique pas les effets des chaque facteurs



* Graphique et ésimation par AAA à partir des données de la Table 1 de Bongaarts et Kirmeyer (1980) et les TBN provenant des WWP, edition 2019







Effet réducteur de la contraception

Source: Bongaarts, John and Sharon Kirmeyer (1982)

38

Relation entre la fécondité et le recours à la contraception :
I. Modèle de régression agrégé

Taux brut de natalité (TBN)*

TBN = 46,9 – 42,0 x U R^2=0,91

* Estimated by D. Nortman and E. Hofstatter, *Population and Family Planning Programs: Data Through 1978* (tenth edition), Population Council New York, 1980

TBN** = 46,23 – 28,86 x U R^2=0,61

* Esimation par AAA à partir des données de la Table 1 de Bongaarts, John and Sharon Kirmeyer (1980) et des données de WWP, edition 2019 (TBN),

Taux de fécondité totale (TFR)

TFT = 7,3 – 6,42 x U = R^2=0,72

= 7,3 x (1-0,879 x U)

Taux de fécondité totale en mariage (TFRM)

TFTM = 9,54 – 4,81 x U R^2=0,40

= 9,54 x (1– 0,504 x U)

On constate *une très forte corrélation* entre le recours à la contraception (U) et le niveau de natalité (TBN)

L'intersection / l'ordonnée d'origine (7,3) représente le niveau attendu de la fécondité naturel en absence de la contraception

La pente de la droit (6,42, négative) caractérise la diminution du niveau associée avec l'augmentation de l'utilisation de la contraception

La pente relative (0,879) montre la diminution proportionnelle (une unité de U ne donne que 0,879 d'unité de diminution du niveau

Taux de fécondité totale en mariage sans allaitement (TFRMA)

TFTMA = 15,25 – 13,71 x U R^2=0,92

= 15,25 x (1– 0,899 x U)

Sachant que $Cc = 1 - 1{,}18 \cdot u \cdot e$

que ***TFTMA = 15,25 x Cc***

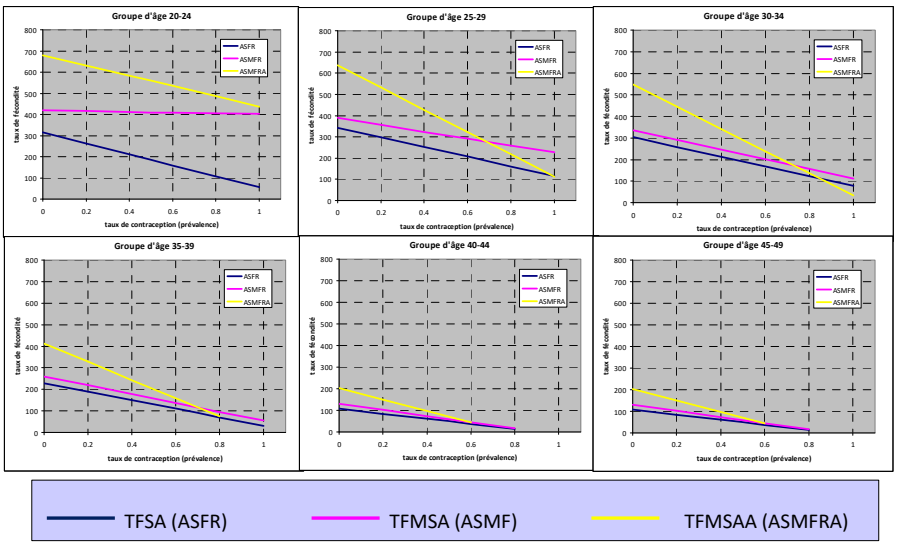
et que $Cc = 1 - u \cdot e \cdot \frac{1}{f}$ où « *f* » – proportion de femmes fécondes

On déduit $1 - 0{,}899 \cdot u = 1 - u \cdot e \cdot \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{e}{f} \approx 0{,}899$

Donc à partir de ***f*** (≈0,85) il est possible d'estimer ***e*** (et inversement)

39

Relation entre la fécondité et le recours à la contraception :
II. Modèles de régression par âge

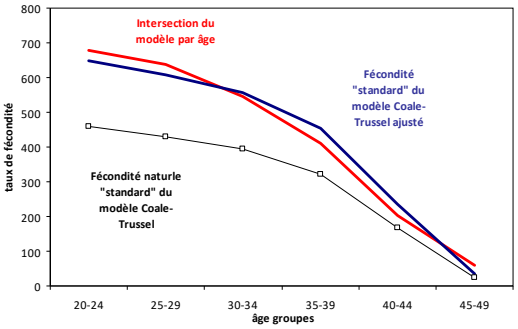


40

Résultats de régression pour le modèle par groupes d'âge

	Groupes d'âge	Intersection (origine)	Pente	Pente relative	R^2
ASFR	Taux de fécondité par âge				
	20-24	315	-260	-0.825	0.52
	25-29	343	-227	-0.662	0.03
	30-34	304	-227	-0.747	0.69
	35-39	229	-198	-0.865	0.51
	40-44	107	-117	-1.093	0.55
	45-49	30	-49	-1.633	0.22
ASMFR	Taux de fécondité des mariages par âge				
	20-24	419	-17	-0.041	0
	25-29	389	-162	-0.416	0.39
	30-34	337	-224	-0.665	0.64
	35-39	260	-205	-0.788	0.52
	40-44	130	-143	-1.100	0.56
	45-49	39	-64	-1.641	0.22
ASMFR ajustés	Taux de fécondité des mariages par âge ajustés				
	20-24	679	-241	-0.355	0.6
	25-29	638	-525	-0.823	0.91
	30-34	547	-514	-0.940	0.9
	35-39	412	-421	-1.022	0.83
	40-44	204	-267	-1.309	0.71
	45-49	59	-112	-1.898	0.32

Comparaison des intersections des régressions et des niveaux de la fécondité naturelle standard du modèle de la fécondité de Coale-Trussel



$$\text{TFAMa}(20-24) = 679 - 421 \cdot u = 679 \cdot (1 - 0{,}620 \cdot u)$$

Sachant que le multiplicateur de l'utilisation de contraception

$$C_c = 1 - e \cdot u / f$$

On peut déduire l'efficacité moyenne de la contraception par âge, si le score de ***f*** est connu → e(20-24) / f (20-24) = 0,620

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 41

41

Application du modèle : estimation indirecte

$$1 - u \cdot e \cdot \frac{1}{f}$$

La comparaison des propos théoriques du modèle avec l'expression en parenthèses dans l'équation de régression montre que la pente relative de la régression corresponde à un rapport « e/f »

e(20-24) / f(20-24) = 0.620

e(24-25) / f(24-25) = 0.823

e(30-34) / f(30-34) = 0.940

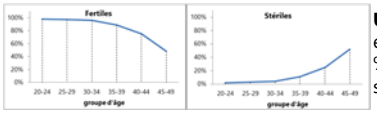
e(35-39) / f(35-39) = 1.022

e(40-44) / f(40-44) = 1.309

e(45-49) / f(45-49) = 1.898

Estimation de l'efficacité moyenne de l'utilisation de la contraception à partir des données sur les proportion de femmes fécondes par âge et des pentes relatives des régressions

Groupe d'âge	**Proportion** de femmes fécondes	**Pente** relative de la régression	**Efficacité estimée** de l'utilisation de la contraception
	A	B	A x B
20-24	0.98	0.620	0.61
25-29	0.97	0.823	0.80
30-34	0.96	0.940	0.90
35-39	0.89	1.022	0.91
40-44	0.75	1.309	0.98
45-49	0.48	1.898	0.91



Un problème majeur = estimation correcte des %% de femmes fertiles / stériles

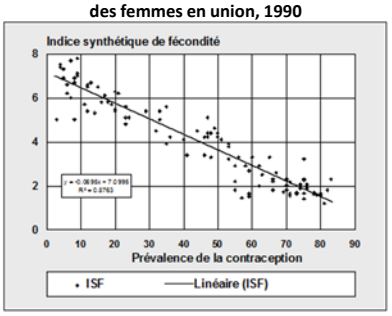
Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 42

42

Application du modèle : prévisions et projections

A partir de l'hypothèse que le niveau de fécondité des mariages ajustée à l'infécondité de la période puerpérale ne dépend que de l'utilisation de la contraception, on peut considérer que : $\frac{TFTMA(2)}{TFTMA(1)} = \frac{1-0{,}899 \cdot u(2)}{1-0{,}899 \cdot u(1)}$ cf. diapo.39

Indice synthétique de fécondité selon la prévalence contraceptive des femmes en union, 1990



Source : Spectrum (Manuel Femplan)

En supposant que tous les autres déterminants proches de la fécondité restent inchangés, on peut estimer la variation du niveau de la fécondité totale entre la période (1) et la période (2) en fonction des changement dans la pratique contraceptive puisque :

$$\frac{TFT(2)}{TFT(1)} = \frac{TFTMA(2) \cdot Cm \cdot Ca \cdot Ci}{TFTMA(1) \cdot Cm \cdot Ca \cdot Ci} = \frac{1-0{,}899 \cdot u(2)}{1-0{,}899 \cdot u(1)}$$

Il est possible d'établir ainsi les objectifs des programmes de planification familiale visant la diminutions de la fécondité (son ajustement à la fécondité désirée)

Développement d'application du modèle : estimation d'efficacité des dépenses

Deux types des méthodes de contraception :

1. Méthodes « traditionnelles » (retrait, abstinence périodique)
   - Peu efficaces
   - Pas chères (que des frais pour l'éducation /formation des couple et du personnel)
2. Méthodes « modernes », ou instrumentales (préservatifs, pilules hormonales, implantes, stérilets, barrières chimiques etc.)
   - Très efficaces (mais l'efficacités est très variables d'une méthode à l'autre)
   - Très chères : sont nécessaires la production industrielle, le système de distribution, le personnel médical de haute qualification etc.

Problème : quelle(s) méthodes choisir pour la promotion dans le cadre d'un programme pour atteindre les objectifs et optimiser les dépenses ?

Pour + des détails : voir (lire le manuel et essayer lancer l'application avec des examples) ***le module « FemPlan*** » du système « ***Spectrum*** »

Exemple d'estimation des efforts (coûts) pour un PPF

Méthode	Efficacité	Unités par CAP	Age moyen des utilisateurs	Coût par utilisateur/ acceptant
Préservatif	81%	120	–	20$/util/an
Stérilisation féminine	100%	–	35,4	100$/accep
Injectables	100%	4	–	20$/util/an
DIU	96%	0.28 (3,5 ans/DUI)	–	20$/accep.
Pilule	92%	15 plaquettes	–	15$/util/an
Traditionnelle	50%	–	–	0$

Changement dans la projection de base	Prévalence nécessaire en 2020
Projection de base	34,4%
Pourcentage des FAP en union, constant	42,4%
Infécondité post-partum, constante	26,7%
Pourcentage des FAP en union et infécondité post-partum, constants	35,5%
Combinaison de méthodes, constante	42,3%
Combinaison de méthodes, pourcentage des FAP en union et infécondité post-partum, constants	43,7%

FAP – **F**emmes à l'**A**ge de **P**rocréer

Notion de **CYP** (CAP):
Couple – Year (Années) – of (de) Protection (quelle quantité des moyens contraceptifs il faut utiliser pour protéger un couple durant une année)

	1995	2020
Déterminants proches		
Nombre de femmes en âge de procréer.	8 400 000	19 200 000
Pourcentage en union	70%	63%
Durée de l'infécondité post-partum	16 mois	13 mois
Taux total d'avortement	0	0
Stérilité involontaire	2,2%	2,2%
ISF	6,6	5,1
Prévalence de la contraception	15%	-
Combinaison de méthodes		
Préservatif	9,3%	12,9%
Stérilisation féminine	7,8%	11,0%
Injectable	2,3%	10,4%
DIU	3,9%	9,2%
Pilule	14,0%	28,0%
Traditionnelle	62,7%	28,5%

Stérilisation féminine : durée ~10 ans ; coût CYP = 10$
DIU : durée 3.5-4.5 ans; coût CYP = 7$

Problème: estimer le financement (supplémentaires) nécessaire pour atteindre les objectifs de l'an 2020

II. Modèles de distribution par âge de la nuptialité et de la fécondité

Problèmes:

- La désagrégation de la population (subdivision en groupes par âge et par sexe dans lesquels la mortalité, la fécondité et la migration sont plus ou moins *homogènes*) permet de d'obtenir une représentation précise d'un phénomène étudié, mais ***la multiplication des séries de nombres est encombrante***.
- L'application de certaines méthodes d'analyse et de projection comme celle des composants demande des taux de fécondité, de mortalité et de migration par âge et par sexe pour chaque intervalle de la période de projection, par conséquent ***des hypothèses se multiplient***.

Solution plausible – réduction de l'information d'entrée d'un modèle :

- Construire un modèle et d'associer, ou de mettre en correspondance, les distributions des taux par âge avec le nombre réduit (un, deux ou trois) des paramètres.
- Le modèle représente *un standard* pour les distributions des taux par âge (densité de risque), *basé sur l'expérience de plusieurs populations* pour lesquelles la qualité des données est bonne.

1. La nuptialité par âge

(caractéristiques principales de la nuptialité et modèle relationnel de Coale-McNeil)

Lecture :

Coale, A.J.(1971) – "Age Patterns of Marriage". *Population Studies.* Vol.25, no. 2, p.193-214

Coale, A.J. and D.R McNeil (1972) – "The Distribution by Age of the Frequency of First Marriage in a Female Cohort" *Journal of American Statistical Association,* Vol. 67, no. 340, p.743-749

John Hajnal (1953) – "Age at marriage and proportions marrying", *Population Studies* vol. VII no.2, p.11-136

Coale A. (1977) – "The Development of New Models of Nuptiality and Fertility", *Population* (French Edition) Vol. 32, La mesure des phénomènes démographiques: Hommage à Louis Henry (Sep., 1977), pp. 131-154

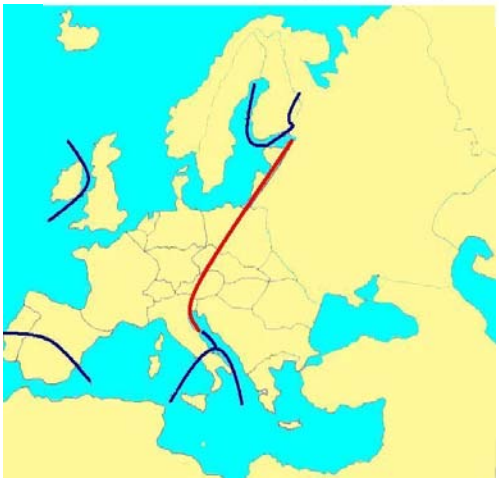
Rolland Pressat (1995) – *Eléments de démographie mathématique*, édition de l'AIDELF, 279 p. (ISBN2-9509356-0-5; ISSN 1160-1531)

Nations Unies (1983) – *Manuel X Techniques indirectes d'estimation démographique*

http://unstats.un.org/unsd/demographic/standmeth/handbooks/Manuel_X-fr.pdf

47

Changement historique de la nuptialité en Europe: « ligne de Hajnal » *(par J.R.)*



Source: http://en.wikipedia.org/wiki/Hajnal_line

La ligne de Hajnal tracée en rouge entre Saint Pétersbourg (Russie) et Trieste (Italie).
***Les lignes bleus** délimitent les zones avec la nuptialité universelle et précoce à l'ouest de la ligne de Hajnal*

A transition around the sixteenth century from a norm of *early and universal marriage* towards a norm of *late marriage with a significant celibacy* was observed. Hajnal called this last norm **the "European marriage pattern"**(Hajnal, 1965). The main characteristics of that transition was a significant increase in the age at first marriage, especially for women, for whom in one century this age increased from around 20 years to more than 25. **"The uniqueness of the European pattern lies primarily in the high age at marriage of women rather than in a high age at marriage for men."** (Hajnal, 1965, p. 134).

Hajnal added that this transition affected only a part of European populations, those at the West of an imaginary line from Saint Petersburg to Trieste, and that the other part followed the early marriage norm until the beginning of the Twentieth century.

Hajnal, John (1965): *European marriage pattern in historical perspective* en D.V. Glass and D.E.C. Eversley, (eds.) *Population in History*, Arnold, Londres

48

Nuptialité et structures familiales en Europe

(propos recueillis par J.R.)

En Europe (de l'Ouest), l'homme devait retarder son mariage jusqu' à ce qu'il puisse disposer de moyens de vie indépendants et suffisants pour faire vivre une famille; dans les autres sociétés, (c'est-à-dire en Europe de l'Est) le jeune couple pouvait être intégré à une unité économique plus vaste, telle que la famille étendue.

Hajnal, John (1965). « European Marriage Patterns in Perspective ». In D. V. Glass & D. E. C. Eversley (Eds.), *Population in History. Essays in Historical Demography.* Volume I: General and Great Britain (pp. 101-143). New Brunswick (U.S.A.): Aldine Transaction

****

Utilisant des recensements conduits à travers l'Europe dans les années 1930, **John Hajnal** constate que la proportion de personnes qui se marient au cours de leur vie et l'âge auquel elles le font sont sensiblement différents dans les pays à l'est et à l'ouest d'une **ligne de Saint-Petersbourg à Trieste : mariage plus fréquent et plus précoce à l'est, plus rare et plus tardif à l'ouest** *(page 191).*

……..

A l'est les ménages sont plus complexes composés souvent de plusieurs familles, en particulier des familles de générations successives (familles de parents âgés et familles d'enfants adults); à l'ouest, la composition des ménages est plus simple, le plus souvent uni-familiaux *(page 191).*

Graziella Caselli, Jacques Vallin, Guillaume Wunsch, *Démographie: analyse et synthèse VIII. Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche.* Editions de l'INED

49

Rappel

Estimation de l'âge moyen au premier mariage à partir des données d'un recensement

Problème : les données sur la nuptialité sont en général assez pauvres par rapport à celles sur la mortalité et fécondité. Nous ne disposons que rarement de l'informations détaillée sur la fréquence de premiers mariages et de la structure de la population par âge et état matrimoniale, sauf pour les années de recensement…

John Hajnal – "Age at marriage and proportions marrying", *Population Studies* vol. VII n°2 November 1953. p.11-136

'Singulate Mean Age at Marriage (SMAM)'

Le nombre d'années vécues en célibat par des personnes qui ne sont pas entrées dans le célibat définitif.

Soit $_n c_x = \frac{_n C_x}{_x P_x}$ est une proportion des célibataires dans **l'intervalle d'âge entre *x* et *x+n***

et $c_{50} = \frac{_1c_{49} + _1c_{50}}{2}$ la proportion des célibataire à l'âge exact de 50 ans, (« le célibat définitif »)

On peut calculer l'âge moyen au premier mariage pour l'intervalle d'âge 15-50 ans, s'il n'y a pas des mariages avant l'âge de15 ans :

$$SMAM = \frac{\sum_{x=0}^{49} {_1c_x} - 50 \cdot c_{50}}{1 - c_{50}} \Rightarrow SMAM = 15 + \frac{\sum_{x=15}^{49} {_1c_x} - 35 \cdot c_{50}}{1 - c_{50}}$$

Sinon pour les groupes quinquennaux : $SMAM = \frac{5 \cdot \sum_{x=0}^{49} {_5c_x} - 50 \cdot c_{50}}{1 - c_{50}}$ et $c_{50} = \frac{_5c_{45} + _5c_{50}}{2}$

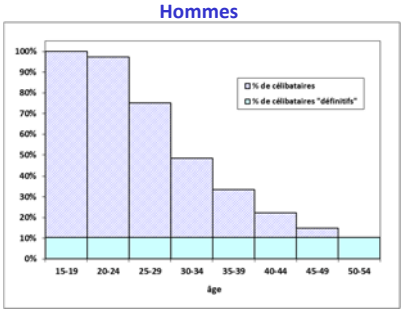
50

Illustration graphique de calcul de l'âge moyen de célibataire au mariage à partir des données de d'un recensement

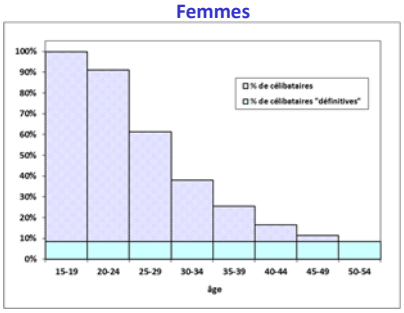
France, population au 1 janvier 2000

(estimée à partir des données du recensement 1999)

Hommes



Femmes



Calculs à partir des données quinquennales :
SMAM = 30,19
c_{50} = 12,56%

Calculs à partir des données par année d'âge :
SMAM = 30,34
c_{50} = 12,21%

Calculs à partir des données quinquennales :
SMAM = 28,6
c_{50} = 9,85%

Calculs à partir des données par année d'âge :
SMAM = 28.70
c_{50} = 9,57%

Parfois il est très utile de calculer la durée moyenne de vie en mariage à l'âge procréateur de 15 à 50 ans correspondant à la durée moyenne sous le risque de grossesse (n_x – l'amplitude de l'intervalle d'âge x, x+n)

$$\bar{\rho} = \sum_{x=15}^{49} n_x \cdot \frac{{}_nM_x}{{}_nP_x^f} = 15,23$$

nombre moyen d'années vécues en mariage

51

Dynamique de la nuptialité d'une génération* en continue

(démonstration de R. Pressat, EDM, p.51)

Soit
C(x) : fonction célibat (résultat d'interpolation entre les valeurs discrètes Cx)
m(x) : fonction mariage
n(x) : fonction risque (quotient)

On définit :

$$\begin{cases} m(x) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{m(x, x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{C(x) - C(x+\Delta x)}{\Delta x} = -C'(x) \\ n(x) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{m(x, x+\Delta x)}{\Delta x \cdot C(x)} = \dfrac{m(x)}{C(x)} = \dfrac{-C'(x)}{C(x)} \end{cases}$$

➔ dérivée logarithmique

Sachant que $C(x) = C(0) \cdot e^{-\int_0^x n(\xi)d\xi}$ on peut passer par intégration aux quantités discrètes :

$$m(x, x+1) = \int_x^{x+1} m(\xi)d\xi \quad \text{et} \quad {}_1n_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} n(\xi)d\xi}$$

On peut calculé l'âge moyen au premier mariage en divisant la somme des âges au mariage âges $=\int_\alpha^\beta x \cdot m(x)\,dx$ par le nombre de ***C(α) – C(β)*** premiers mariages dans l'intervalle (α,β). Avec le recours à une intégration de la somme des âge par parties on obtient

$$\int_\alpha^\beta x \cdot m(x)dx = -\int_\alpha^\beta x \cdot C'(x)dx = [-x \cdot C(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta C(x)dx = \alpha \cdot C(\alpha) - \beta \cdot C(\beta) + \int_\alpha^\beta C(x)dx$$

qu'on divise par ***C(α)-C(β)*** en faisant un recours à l'artifice

$$\alpha \cdot C(\alpha) - \beta \cdot C(\beta) = \alpha \cdot C(\alpha) - \alpha \cdot C(\beta) + \alpha \cdot C(\beta) - \beta \cdot C(\beta) = \alpha[C(\alpha) - C(\beta)] - C(\beta)(\alpha - \beta) + \int_\alpha^\beta C(x)dx$$

On obtient une formule $Age\ moyen = \alpha + \dfrac{\int_\alpha^\beta C(x)dx - C(\beta)\cdot(\beta - \alpha)}{C(\alpha) - C(\beta)}$ équivalente à celle intuitive du SMAM

Q.E.D.

* - fictive ou réelle

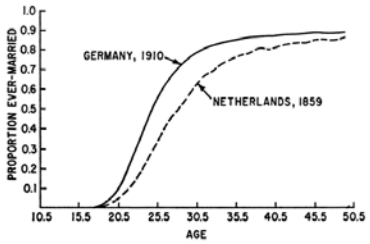
52

Quelques remarques à propos de la modélisation de la nuptialité

- L'âge moyen au premier mariage est une caractéristique importante, mais elle n'est pas suffisante pour dresser un image de la nuptialité.
- Autres caractéristiques cruciales :
  - le célibat définitif, qui n'a pas d'influence sur l'âge moyen au (premier) mariage
  - l'âge du départ (quand la nuptialité commence à différer du zéro)
  - la dissymétrie de la densité des mariages selon l'âge
  - la concentration de la densité des mariages autour de la tendance centrale
- Toutes ces caractéristiques ne permettent que voir la variation de la nuptialité
- Trois questions suivantes s'imposent :
  - Est-ce dans toutes les populations les courbes de la nuptialité par âge (densité de mariage/de risque) se ressemblent ?
  - Est-ce que les données longitudinales (nuptialité de générations) donnent le même résultat que celles transversales (nuptialité des générations fictives) ?
  - Est-ce que la fonction de risque de la primo nuptialité suit, elle aussi, un schéma universel ?

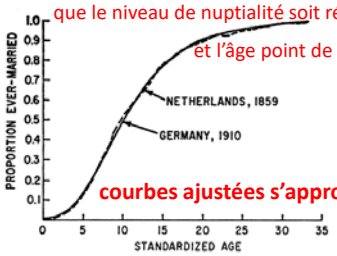
Question 1 : Est-ce dans toutes les populations les courbes de la nuptialité par âge se ressemblent ? (courbes sont-elles topologiquement similaires/équivalentes)

Courbes empiriques sont variées → si deux axes sont standardisées



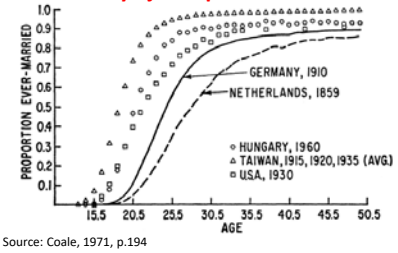
que le niveau de nuptialité soit réduit à 1 ;

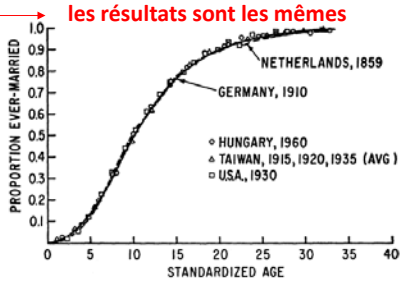
et l'âge point de départ = 0



courbes ajustées s'approchent

Si l'on y ajoute plus d'observations → les résultats sont les mêmes

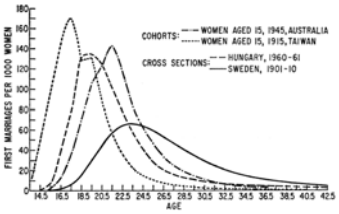


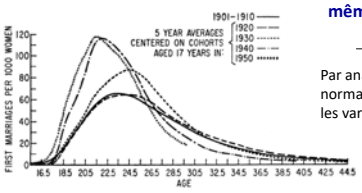


Source: Coale, 1971, p.194

Apparemment, c'est « **OUI** », les observations historiques en font la preuve

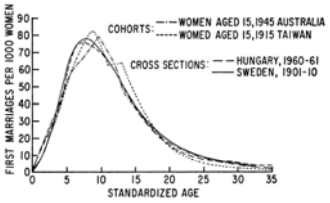
Question 2 : Est-ce que les données longitudinales donnent le même résultat que celles transversale ?

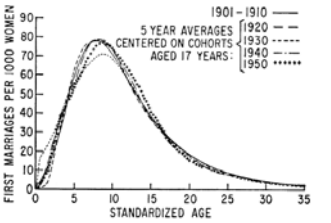




L'ajustement des échelles ramène les courbes de primo nuptialité, si différentes (à gauche) au même schéma (à droite)

Par analogie avec la distribution normale qui est la même pour les variables très différentes

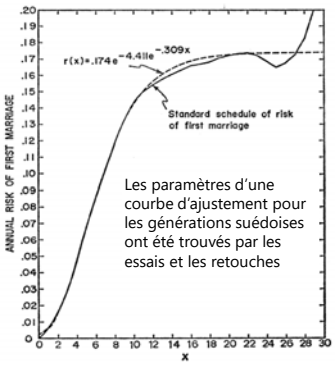




"*The most puzzling feature of the common pattern of first-marriage frequencies is its very prevalence*. We have seen evidence of the *same basic curve of first marriages in cohorts that marry early and cohorts that marry late*, in cohorts *in which marriage is virtually universal, and in cohorts in which one-quarter remain single*. Moreover, the uniform age structure of nuptiality occurs *in societies in which most marriages are arranged by families with little regard for the preference of bride and groom, and in societies in which marriages typically result from the self-selection of mutually preferred partners*". (A. Coale, 1971, p.203)

Question 3 : Est-ce que la fonction de risque de la primo nuptialité suit, elle aussi, un schéma universel ?

Le risque de mariage (sortie du célibat) pourrait être défini comme le taux de mariage par âge des personnes éligibles pour le premier mariage (les célibataires). *Il s'agit donc des taux de première catégorie.*



Les paramètres d'une courbe d'ajustement pour les générations suédoises ont été trouvés par les essais et les retouches

(F1) $r^s(x) = 0{,}174 \cdot e^{-4{,}411 \cdot e^{-0{,}309 \cdot x}}$

la formule empirique de la nuptialité « standard » (densité des premiers mariage en Suède, 1965-1969)

Pour que cette formule soit universelle il faudrait

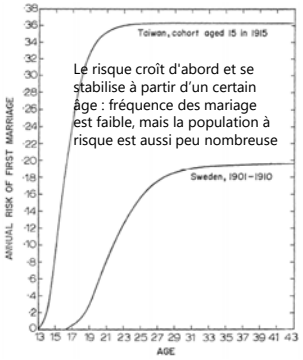
1) y introduire un paramètre qui gère la vitesse relative de la nuptialité par rapport à un standard et
2) ajuster l'âge initial

Soit

k – la vitesse relative, si k=1 le risque de mariage dans la population croît avec la même vitesse que dans la population de référence:

$$\kappa = \frac{\beta - \alpha}{\beta^s - \alpha^s}$$

$(a - a_0)$ – la distance entre l'âge initial (a_0) et l'âge au mariage (a)



Le risque croît d'abord et se stabilise à partir d'un certain âge : fréquence des mariage est faible, mais la population à risque est aussi peu nombreuse

$$r(a) = \frac{0{,}174}{k} \cdot e^{-4{,}411 \cdot e^{-0{,}309 \cdot \left(\frac{a - a_0}{\kappa}\right)}}$$ **(F2)**

La nuptialité par âge (modèle relationnel de Coale-McNeil)

Idée: la primo-nuptialité par âge dérive d'un schéma standard (de la « nuptialité naturelle »)

la formule empirique de la nuptialité « standard » (densité des premiers mariages en Suède, 1865-1869)

$$g^s(x) = 0{,}19465 \cdot e^{-0{,}174\cdot(x-6{,}06)-e^{-0{,}288\cdot(x-6{,}606)}} \qquad \textbf{(F3)}$$

En 1972, A. Coale et D. McNeil ont démontré que cette fonction de densité (F3) est une bonne approximation de la fonction du risque (F2) voir diapo. précédente

Modèle relationnel :

$$G(a) = \Theta \cdot G^S(a) \cdot \left(\frac{a-a_0}{\kappa}\right)$$

- G(a) – la proportion de non célibataires à l'âge *a* dans la population observée
- $G^S(a)$ – la proportion de non célibataires à l'âge *a* parmi celles destinées à se marier dans la population de référence (standard)
- a_0 – âge de début de la nuptialité (~1% de femmes se marient)
- κ – la vitesse de la nuptialité (combien d'années de la nuptialité de la population observée correspondent à une année de la nuptialité standard
- Θ – le facteur d'échelle représentant la proportion définitive de non célibataire (Θ =1 – C où C est le célibat définitive)

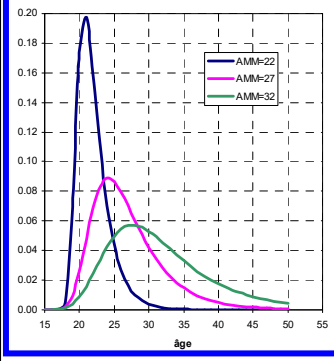
Application du modèle de Coale-McNeil

En paramétrant ainsi la formule F3, on obtient :

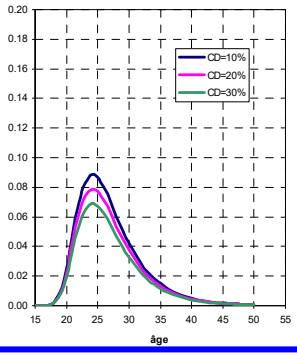
$$g(a) = \frac{0{,}19465 \cdot \Theta}{\kappa} \cdot e^{\frac{-0{,}174}{\kappa}\cdot(a-a_0-6{,}06\cdot\kappa)-e^{\frac{-0{,}288}{\kappa}(a-a_0-6{,}06\cdot\kappa)}}$$

Illustration: **Changement de la densité des premiers mariages en fonction de niveau du célibat définitif et de l'âge moyen de primo-nuptialité**

1. Célibat définitif (CD) =10% a_0=18



2. Age moyenne au mariage (AMM)=27; a_0=18



Estimation de κ

$$\mu = \int_0^\infty a \cdot g(a)da = a_0 + 11{,}37 \cdot \kappa$$

μ - âge moyen au premier mariage (SMAM en l'occurrence)

donc $$\kappa = \frac{\mu - a_0}{11{,}37}$$

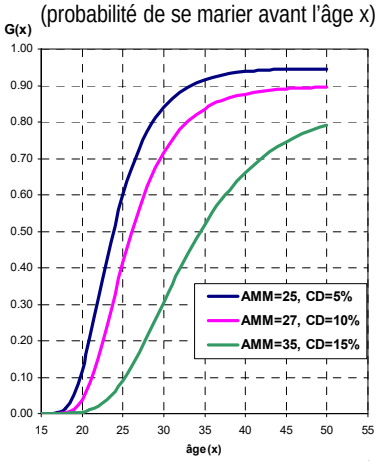
et aussi la variance des âge au mariage soit :

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (a-\mu)^2 \cdot g(a)da = 43{,}34 \cdot \kappa$$

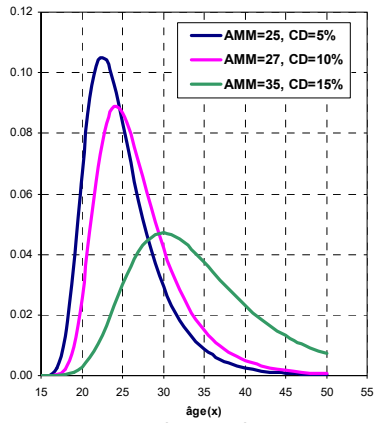
Application du modèle de Coale-McNeil pour la projection:

Divers scénarios des changements de la nuptialité appliqués à la projection.

Distribution des premiers mariages (probabilité de se marier avant l'âge x)



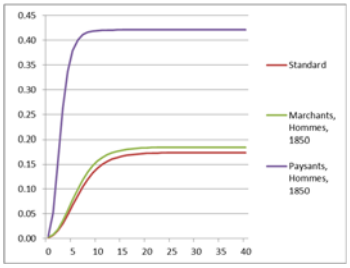
Densité des premiers mariages (probabilité de se marier à l'âge x)



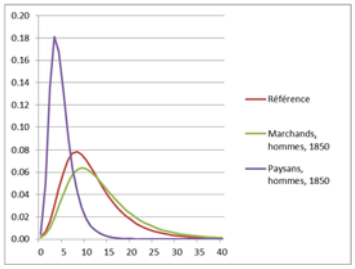
AMM – âge moyen au premier mariage; CD – célibat définitif (proportion de célibataire à l'âge 50 ans)

Application aux études historiques : modélisation de la nuptialité des catégories sociale en Russie au 19e siècle*

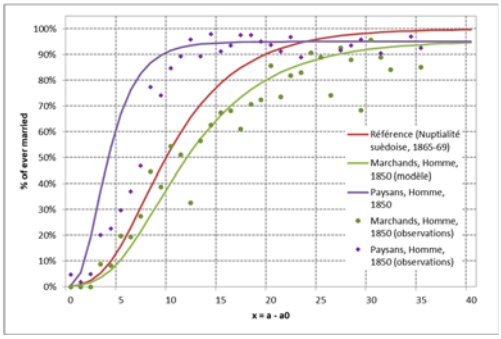
Risque de primo-nuptialité



Fonction de premiers mariages



Comparaison des données empirique avec les résultat de la modélisation



Les résultats de la modélisation sont plutôt satisfaisants surtout pour les commerçants moscovites et moins bons pour les paysans qui se mariaient assez tôt et dans l'intervalle assez court

* - A.Avdeev, I.Troitskaia (2016) "Family Structures and Marriage Models in Moscow and its Suburbs in the First Half of the 19th Century" // Papers presented on 41st Annual Meeting of the Social Science History Association, Chicago, 2016

2. Fécondité par âge

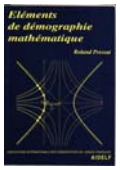
- Ajustement analytique de la fonction fécondité
- Modèle basé sur un calendrier type de Coale-Trussel
- Modèle relationnel de W.Brasse

Lecture :

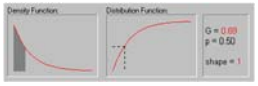
Coale, A.J.(1974) – "Model Fertility Schedules: Variations in The Age Structure of Childbearing in Human Populations". *Population Index*, Vol. 40, No. 2 (Apr., 1974), pp. 185-258

Nations Unies (1981) – Manual X *Téchinques indirectes d'éstimations démographiques* Série "Etudes démographiques" N°81. ST/ESA/SER.A/81

Rolland Pressat (1995) – *Eléments de démographie mathématique*, édition de l'AIDELF, 279 p. (ISBN2-9509356-0-5; ISSN 1160-1531)

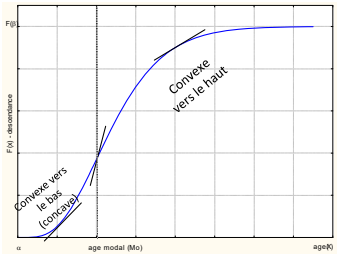


Ajustement d'un distribution avec la fonction Gamma dans le système « Statistica »

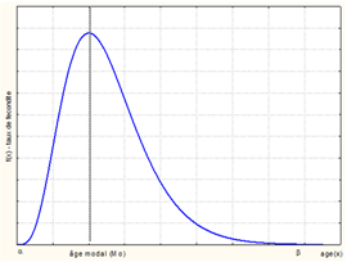


Approche mathématique de la fécondité par âge

Fonction de distribution
(descendance à l'âge x)



Fonction de densité (taux à l'âge x)



Soit *α* – âge de début de la fécondité
β – âge de fin de la fécondité
F(x) – la descendance à l'âge x (fonction descendance)

Alors la *fonction fécondité* :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

la fonction descendance : $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(\xi) d\xi$

On peut aussi imaginer que $f(x) = F(\beta) \cdot \varphi(x)$

où *φ(x)* est une fonction du calendrier $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx = 1$

Les observations empiriques nous apprennent que la fonction de fécondité est (pratiquement) toujours *unimodale* (distribution avec un seul point d'inflexion) et légèrement *étalée vers la droite* dans la plupart des cas.

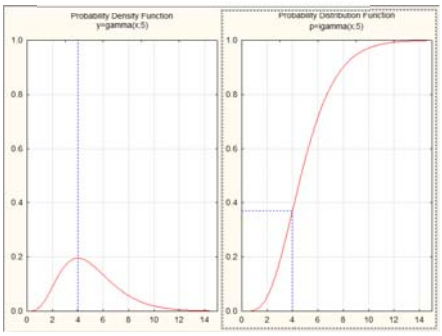
La description se fait avec des paramètres (population) ou des statistiques (échantillon) de la tendance centrale et de la forme

Ajustement analytique de la fécondité par âge

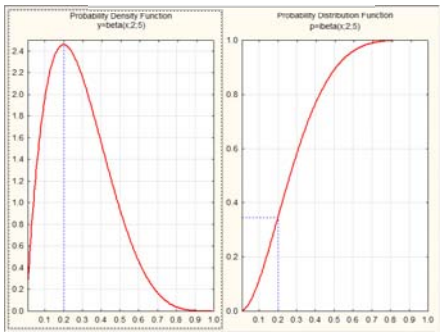
Question 1 : peut-on trouver une ou des fonctions analytiques (paramétriques) dont la distribution et la densité sont proches à celles de la fécondité (humaine) ?

Question 2 : si c'est « oui », est-il possible de trouver un rapport (association) stable entre les paramètres de cette (ces) fonction(s) et les caractéristiques sommaires de la fécondité, à savoir, avec la descendance finale, l'âge moyen à la maternité, âge modal, etc. ?

Loi (fonction) Gamma



Loi (fonction) Bêta



Loi gamma :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty X^{a-1} \cdot e^{-X} dX, a > 0$$

On peut substituer λx (λ>0) à X, alors la distribution sera définie par deux paramètres :

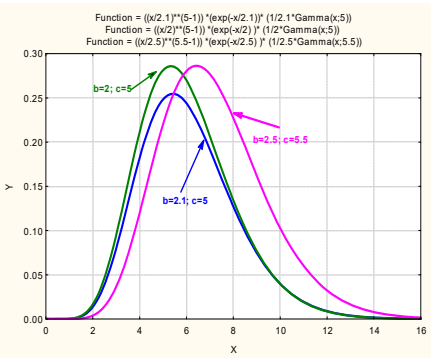
$\boldsymbol{a}$ – paramètre de forme
$\boldsymbol{\lambda}$ – paramètre de l'échelle

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty (\lambda \cdot x)^{a-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x} d(\lambda x)$$

par ailleurs, si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Z}_+ \rightarrow \boldsymbol{\Gamma(a+1) = a!}$

en la divisant par Γ(a) on obtient sa densité :

$$\gamma(x; a; \lambda) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x},$$



avec les caractéristiques :

la moyenne : $E\gamma(a, \lambda) = \frac{a}{\lambda}$;

le mode : $X_{mod} = \frac{a-1}{\lambda}$; la dispersion: $\sigma^2 = \frac{a}{\lambda^2}$;

la dissymétrie : $\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$ et l'aplatissement : $\beta_2 = \frac{6}{a}$

Si *a>1* et *X=x-α*, où

x – âge de fécondité
α – âge initial de la fécondité, et
β – âge final de la période féconde alors

$$f(x) = F(\beta) \cdot \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot (x-\alpha)^{a-1} \cdot e^{-\lambda \cdot (x-\alpha)} \quad a > 1, \lambda > 0$$

Propriété important de la fonction gamma :

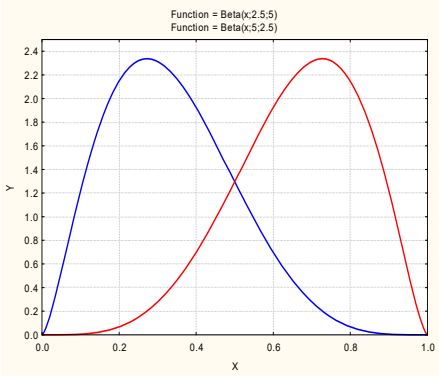
$$\sum_i \Gamma(a_i, \lambda) = \Gamma(a_1 + a_{2+} + ..., \lambda)$$

Lecture: R. Pressat, 1995, p.57-70

Fonction bêta (intégrale d'Euler de type I)

$B(a,b)=\int_0^1 X^{a-1}\cdot(1-X)^{b-1}dX,\ a,b>0$ avec la densité, $\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)+\Gamma(b)}\cdot X^{a-1}\cdot(1-X)^{b-1}, 0\le X\le 1$

où *a* et *b* sont les paramètres de la position et de la forme



avec les caractéristiques :

moyenne : $E\beta(a,b)=\frac{a}{a+b}$

mode : $X_{\text{mod}}=\frac{a-1}{a+b-1}$

dispersion : $\sigma^2=\frac{a\cdot b}{(a+b)^2\cdot(a+b+1)}$

dissymétrie : $\beta_1=\frac{2\cdot(a-b)\cdot\sqrt{a+b+1}}{(a+b+2)\cdot\sqrt{a\cdot b}}$

aplatissement :

$$\beta_1=\frac{3\cdot(a+b+1)\cdot\left[2\cdot(a+b)^2+a\cdot b\cdot(a+b-6)\right]}{a\cdot b\cdot(a+b+2)\cdot(a+b+3)}$$

pour introduire l'âge de fécondité il faut substituer à $X=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ alors on obtient :

$$f(x)=F(\beta)\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)+\Gamma(b)}\cdot\frac{(x-\alpha)^{a-1}\cdot(\beta-x)^{b-1}}{(\beta-\alpha)^{a+b-1}}$$ où $1<a<b$

Estimation des paramètres de fonction Γ et β à partir des observations

	Fonction gamma	Fonction beta	Rappel de formules statistiques
moyenne μ(X)	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{a+b}$	$m(x)=\sum_{x=\alpha}^{\beta}(x+0,5\cdot n_x)\cdot\frac{{}_nf_x}{\sum_{x=\alpha}^{\beta}{}_nf_x}$
variance σ²(X)	$\frac{a}{\lambda^2}$	$\frac{a\cdot b}{(a+b)^2\cdot(a+b+1)}$	$\sigma_x^2=m(x^2)-[m(x)]^2$
1er paramètre	$a=\frac{\mu^2(x)}{\sigma^2(x)}$	$a=\frac{[1-\mu(x)]\cdot\mu^2(x)}{\sigma^2(x)}-\mu(x)$	
2nd paramètre	$\lambda=\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}$	$b=\frac{[1-\mu(x)]^2\cdot\mu(x)}{\sigma^2(x)}-[1-\mu(x)]$	

Dans le cas de **la loi gamma**

$\boldsymbol{\mu(X)=m(x-\alpha)=m(x)-\alpha}$: ***m(x)*** étant l'âge moyen à la maternité et $\boldsymbol{\alpha}$ – âge initial

$\boldsymbol{\sigma^2(X)=\sigma^2(x-\alpha)=\sigma^2(x)}$ – variance d'âge à la maternité

Dans le cas de **la loi beta**

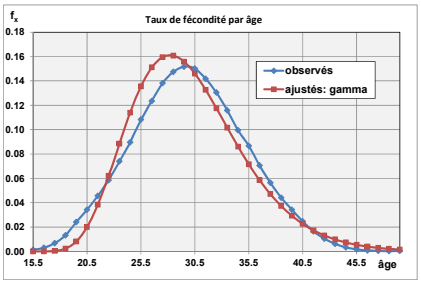
$\boldsymbol{\mu(X)=m\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{m(x)-\alpha}{\beta-\alpha}}$: ***m(x)*** étant l'âge moyen à la maternité et $\boldsymbol{\beta}$ – âge terminal

$\boldsymbol{\sigma^2(X)=\sigma^2\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{\sigma^2(x)}{(\beta-\alpha)^2}}$: ***σ²(x)*** étant la variance d'âge à la maternité

Exemple d'application 1a :

	A	B	C	D	E	F	G
1	France 2010		fx				fx
2	x	x_c	observés	x_c*fx	x_c*2*fx	x_c-15	ajustés: gamma
3	15	15.5	0.0014	0.021	0.327	0.5	0.0000
4	16	16.5	0.0030	0.049	0.804	1.5	0.0000
5	17	17.5	0.0068	0.118	2.069	2.5	0.0004
6	18	18.5	0.0132	0.245	4.531	3.5	0.0023
7	19	19.5	0.0241	0.470	9.157	4.5	0.0082
8	20	20.5	0.0343	0.702	14.395	5.5	0.0200
9	21	21.5	0.0456	0.981	21.101	6.5	0.0384
10	22	22.5	0.0585	1.315	29.599	7.5	0.0621
11	23	23.5	0.0739	1.737	40.828	8.5	0.0884
12	24	24.5	0.0895	2.193	53.726	9.5	0.1139
13	25	25.5	0.1082	2.759	70.360	10.5	0.1355
14	26	26.5	0.1234	3.271	86.685	11.5	0.1511
15	27	27.5	0.1381	3.799	104.473	12.5	0.1595
16	28	28.5	0.1474	4.201	119.726	13.5	0.1608
17	29	29.5	0.1516	4.474	131.973	14.5	0.1558
18	30	30.5	0.1502	4.580	139.687	15.5	0.1459
19	31	31.5	0.1416	4.461	140.513	16.5	0.1327
20	32	32.5	0.1304	4.239	137.776	17.5	0.1175
21	33	33.5	0.1158	3.879	129.943	18.5	0.1016
22	34	34.5	0.0995	3.434	118.468	19.5	0.0861
23	35	35.5	0.0867	3.076	109.204	20.5	0.0716
24	36	36.5	0.0705	2.574	93.946	21.5	0.0585
25	37	37.5	0.0564	2.114	79.276	22.5	0.0471
26	38	38.5	0.0441	1.698	65.373	23.5	0.0373
27	39	39.5	0.0342	1.352	53.422	24.5	0.0292
28	40	40.5	0.0247	1.000	40.489	25.5	0.0226
29	41	41.5	0.0164	0.682	28.295	26.5	0.0173
30	42	42.5	0.0105	0.447	18.983	27.5	0.0131
31	43	43.5	0.0062	0.270	11.730	28.5	0.0098
32	44	44.5	0.0033	0.146	6.490	29.5	0.0073
33	45	45.5	0.0017	0.078	3.543	30.5	0.0054
34	46	46.5	0.0009	0.041	1.896	31.5	0.0040
35	47	47.5	0.0004	0.020	0.942	32.5	0.0029
36	48	48.5	0.0002	0.010	0.473	33.5	0.0021
37	49	49.5	0.0004	0.020	1.009	34.5	0.0015
38	F(β)		2.0132	60.4553	1871.2103		2.0098
39				30.0299	27.6884	5.2620	
40				moyenne	variance	écart-type	
41				m(x)	σ^2(x)		
42			m(x)-15	15.0299	27.6884		
43	a			8.1586		8.1586	
44	λ			0.5428		1.8422	
45	Γ(a)			6950.055			

Fonction gamma



$$f(x) = F(\beta)\cdot\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\cdot(x-\alpha)^{a-1}\cdot e^{-\lambda\cdot(x-\alpha)}$$

α=15

a=[m(x) –α]²/σ²(x);

λ=[m(x)-α]/ σ²(x)

NB : L'hypothèse sous-jacente sur la linéarité de la distribution dans chaque intervalle d'âge résulte en biais d'estimation

Formule dans la cellule « G3 » =C$38*D$44^D$43/D$45*F3^(D$43-1)*EXP(-D$44*F3)

67

67

Exemple d'application 1b :

Ajustement GAMMA

France 2010: Groupes quinquennaux

A	B	C	D	E	F	G	H
55			fx				fx
56	x	x_c	observés	x_c*fx	x_c*2*fx	x_c-15	ajustés: gamma
57	15-19	17.5	0.0484	0.847	14.819	2.5	0.0029
58	20-24	22.5	0.3018	6.791	152.788	7.5	0.3329
59	25-29	27.5	0.6688	18.393	505.810	12.5	0.7759
60	30-34	32.5	0.6375	20.720	673.391	17.5	0.5709
61	35-39	37.5	0.2919	10.946	410.465	22.5	0.2392
62	40-44	42.5	0.0611	2.597	110.362	27.5	0.0717
63	45-49	47.5	0.0036	0.172	8.165	32.5	0.0172
64	F(β)		2.0132	60.4646	1875.7995		2.0108
65				30.0346	29.6912		
66				moyenne	variance		
67				m(x)	σ^2(x)		
68			m(x)-15	15.0346	29.6912		
69	a			7.6130			
70	λ			0.5064			
71	Γ(a)			2333.8010			

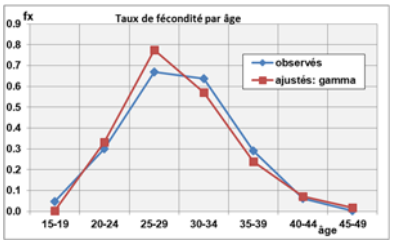
$$f(x) = F(\beta)\cdot\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\cdot(x-\alpha)^{a-1}\cdot e^{-\lambda\cdot(x-\alpha)}$$

NB : L'hypothèse sous-jacente sur la linéarité de la distribution dans chaque intervalle d'âge résulte en biais d'estimation (graphique en haut à droite)

Formule dans la cellule H57

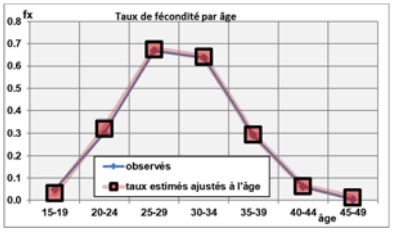
=5*D$64*E$70^E$69/E$71*G57^(E$69-1)*EXP(-E$70*G57)

Sinon =$C$64*5*LOI.GAMMA.N(F57;$D$69;(1/$D$70);FAUX)



Si nous pouvons préciser la localisation des centres de chaque intervalles d'âge, *les estimateurs s'approchent plus aux données* (graphique en bas à droite)

	A	B	C	D
74	x_c (précisé)	x_c-15	taux estimés ajustés à l'âge	
75	19	4.0	0.0307	
76	22.4	7.4	0.3205	
77	25.5	10.5	0.6744	
78	31.5	16.5	0.6420	
79	36.5	21.5	0.2939	
80	43	28.0	0.0627	
81	48.5	33.5	0.0127	
82			2.0368	



68

Annexe : application de la loi gamma à ajustement (nouvelles fonctions dans l'Excel)

Une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres k et θ (strictement positifs), ce que l'on note aussi $X \sim \Gamma(k,\theta)$, si sa fonction de densité de probabilité peut se mettre sous la forme :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \cdot \Gamma(k)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \Gamma(k) \text{ étant la fonction Gamma d'Euler.} \qquad \text{(F1)}$$

Avec l'espérance (moyenne) $= \mathbf{k \cdot \theta}$ et la variance $= \mathbf{k \cdot \theta^2}$

On utilise l'écriture alternative avec les paramètres α et β : $f(x,\alpha,\beta) = x^{\alpha-1} \cdot \dfrac{\beta^\alpha \cdot e^{-\beta \cdot x}}{\Gamma(\alpha)}$ pour x>0

Notamment en MS Excel on trouve la fonction : **LOI.GAMMA.N(x,alpha,bêta,cumul)** avec

x – la valeur à laquelle on estime la densité de fréquence (l'âge réduit dans notre cas) ;

alfa – le paramètre de position (alias « ***k*** » de la F1, alias « ***a*** » dans l'écriture de Pressat) ;

beta – le paramètre de la forme (alias « ***θ*** » de la F1, **on voit que *λ* de Pressat** $= \frac{1}{\beta}$) ;

cumul – une instruction qui prend la valeur « vrai » pour renvoyer les fréquence cumulée vers ***x***, ou « faux » pour envoyer la densité de fréquence de ***x***

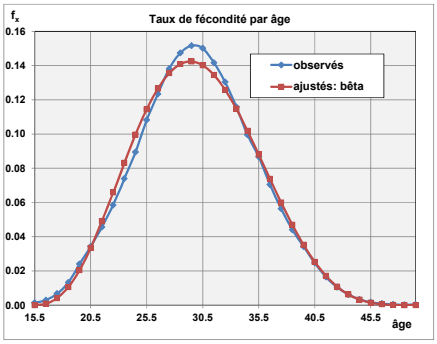
Dans l'exercice sur la diapositive 67 pour les calculs dans la colonne G3:G37 on peut utiliser la formule =$C$38*loi.gamma.n(F3;$D$43;(1/$D$44);faux)

69

Exemple d'application 2a :

France 2010		fx				fx
x	x_c	observés	x_c*fx	x_c*2*fx	x_c-15	ajustés: bêta
15	15.5	0.0014	0.021	0.327	0.5	0.0000
16	16.5	0.0030	0.049	0.804	1.5	0.0009
17	17.5	0.0068	0.118	2.069	2.5	0.0041
18	18.5	0.0132	0.245	4.531	3.5	0.0105
19	19.5	0.0241	0.470	9.157	4.5	0.0204
20	20.5	0.0343	0.702	14.395	5.5	0.0335
21	21.5	0.0456	0.981	21.101	6.5	0.0490
22	22.5	0.0585	1.315	29.599	7.5	0.0659
23	23.5	0.0739	1.737	40.828	8.5	0.0831
24	24.5	0.0895	2.193	53.726	9.5	0.0997
25	25.5	0.1082	2.759	70.360	10.5	0.1144
26	26.5	0.1234	3.271	86.685	11.5	0.1266
27	27.5	0.1381	3.799	104.473	12.5	0.1356
28	28.5	0.1474	4.201	119.726	13.5	0.1409
29	29.5	0.1516	4.474	131.973	14.5	0.1424
30	30.5	0.1502	4.580	139.687	15.5	0.1402
31	31.5	0.1416	4.461	140.513	16.5	0.1345
32	32.5	0.1304	4.239	137.776	17.5	0.1259
33	33.5	0.1158	3.879	129.943	18.5	0.1148
34	34.5	0.0995	3.434	118.468	19.5	0.1019
35	35.5	0.0867	3.076	109.204	20.5	0.0880
36	36.5	0.0705	2.574	93.946	21.5	0.0738
37	37.5	0.0564	2.114	79.276	22.5	0.0599
38	38.5	0.0441	1.698	65.373	23.5	0.0469
39	39.5	0.0342	1.352	53.422	24.5	0.0353
40	40.5	0.0247	1.000	40.489	25.5	0.0253
41	41.5	0.0164	0.682	28.295	26.5	0.0171
42	42.5	0.0105	0.447	18.983	27.5	0.0108
43	43.5	0.0062	0.270	11.730	28.5	0.0063
44	44.5	0.0033	0.146	6.490	29.5	0.0032
45	45.5	0.0017	0.078	3.543	30.5	0.0014
46	46.5	0.0009	0.041	1.896	31.5	0.0005
47	47.5	0.0004	0.020	0.942	32.5	0.0001
48	48.5	0.0002	0.010	0.473	33.5	0.0000
49	49.5	0.0004	0.020	1.009	34.5	0.0000
F(ß)		2.0132	60.455	1871.210		2.0132
			30.0299	**27.6884**		
			moyenne	variance		
			m(x)	**σ^2(x)**		
		m(X)	0.4294	0.0226		
a			4.2257			
b			5.6146			
a+b			9.8403			
Γ(a)			8.0233			
Γ(b)			63.0384			
Γ(a+b)			253614.6000			

Fonction bêta



$$f(x) = F(\beta) \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} \cdot \frac{(x-\alpha)^{a-1} \cdot (\beta - x)^{-(b-1)}}{(\beta-\alpha)^{a+b-1}}$$

a= {[1-m(X)]*m(X)^2}/s^2(X) – m(X)

b={[1-m(X)]^2*m(X)}/s^2(X) – [1-m(X)]

m(X) = [m(x)-α]/(β-α) $\quad$ s^2(X) = σ^2(x)/(β-α)^2

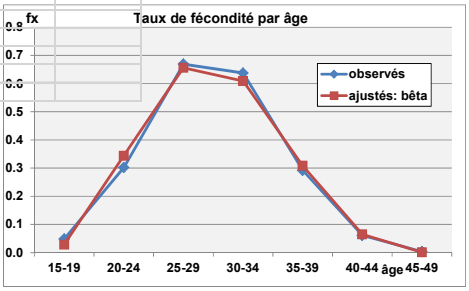
70

Exemple d'application 2b :

Groupes quinquennaux **France 2010**

Formule dans la cellule H58
=5*C$65*D$75/(D$73*D$74)*F58^(D$70-1)*(50-B58)^(D$71-1)/35^(D$70+D$71-1)

A	B	C	D	E	F	G	H
56			5*fx				5*fx
57	x	x_c	observés	(x_c)*fx	(x_c)^2*fx	x_c-15	ajustés: bêta
58	15-19	17.5	0.0484	0.8468	14.8190	2.5	0.0282
59	20-24	22.5	0.3018	6.7906	152.7884	7.5	0.3438
60	25-29	27.5	0.6688	18.3931	505.8098	12.5	0.6559
61	30-34	32.5	0.6375	20.7197	673.3908	17.5	0.6089
62	35-39	37.5	0.2919	10.9457	410.4651	22.5	0.3085
63	40-44	42.5	0.0611	2.5967	110.3615	27.5	0.0649
64	45-49	47.5	0.0036	0.1719	8.1649	32.5	0.0010
65	F(β)		2.0132	60.4646	1875.7995		2.0112
66				**30.0346**	**29.6912**		
67				moyenne	variance		
68				**m(x)**	**σ^2(x)**		
69			m(X)	0.4296	0.0242		
70	a			3.9132			
71	b			5.1966			
72	a+b			9.1098			
73	Γ(a)			5.3860			
74	Γ(b)			32.4070			
75	Γ(a+b)			51039.2700			



$$f(x) = F(\beta)\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}\cdot\frac{(x-\alpha)^{a-1}\cdot(\beta-x)^{\cdot(b-1)}}{(\beta-\alpha)^{a+b-1}}$$

a= {[1-m(X)]*m(X)^2}/s²(X) – m(X)

b={[1-m(X)]^2*m(X)}/s²(X) – [1-m(X)]

71

Modèles de la fécondité par âge basés sur *le calendrier type*
(modèles relationnels de Coale-Trussel et de W.Brass)

Henry, L.(1961) – "Some Data on Natural Fertility" *Eugenics Quarterly,* Vol. 8, no. 2, p.81-91

Coale, A.J. and J.Trussell (1974) – "Model Fertility Schedules: Variation in the Age Structure of Childbearing in Human Populations", *Population Index,* Vol.40, no. 2, p.185-258

Brass W.(1978) – *The Relational Gompertz Model of Fertility by Age of Women.* London School of Hygiene and Tropical Medicine, (polycopie)

Booth, H. (1984) – "Transforming the Gomperz for Fertility Analysis: The Development of Standard for Relational Gompertz", *Population Studies*, Vol. 32, no. 3, p.495-506

S'il n'y pas de fécondité hors mariage, alors:

$f(a) = G(a)\cdot\phi(a)$ où *f(a)* – fonction taux de fécondité (densité)
G(a) – fonction proportion de femmes mariées (distribution)
ϕ(a) – fonction taux de fécondité en mariage (densité)

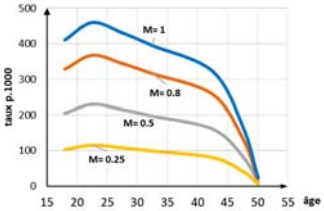
72

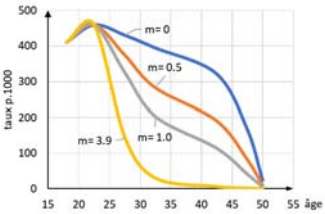
Modèle relationnel (semi-paramétrique) de Coale-Trussell pour la fécondité par âge

Ansley Johnson Coale
14 nov.1917 – 2 nov. 2002),

La base empirique: les taux de fécondité en mariage par âge dans 10 populations (de Louis Henry) en régime de la fécondité naturelle 43 populations avec la fécondité contrôlée

L'hypothèse théorique: la fécondité observée est une déviation de la fécondité naturelle sous l'influence du contrôle des naissance (planification familiale)





Modèle à deux paramètres et à deux standards

1) soit

n(x) – taux de fécondité naturelle (***standard***)

ϕ(x) – taux de fécondité en mariage (observation)

M – **paramètre** du niveau de fécondité : $n_M(x) = M \cdot n(x)$ → diminution proportionnelle aux taux de la fécondité naturelle

2) soit

υ(x) – (upsilon) ≤ 0 une déviation ***standard*** de la fécondité naturelle (la même pour plusieurs population) ayant un effet multiplicative décroissant (***υ(x)* ≤0**) associé à l'âge) sur la fécondité naturelle → $e^{\upsilon(x)}$

m – **paramètre** du niveau de la limitation volontaire des naissance → $e^{m \cdot \upsilon(x)}$

$$\phi(x) = M \cdot n(x) \cdot e^{m \cdot \upsilon(x)}$$

Cf . A.Coale and J.Trussel (1974) : http://www.jstor.org/stable/2733910

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 73

73

Estimation des paramètres du modèle Coale–Trussell: méthode simple

Fonctions standard empiriques du modèle

Age = x	*n(x)*	*υ(x)*
15-19	0.411	0
20-24	0.460	0
25-29	0.431	-0.279
30-34	0.395	-0.667
35-39	0.322	-1.042
40-44	0.167	-1.414
45-49	0.024	-1.671
ISF	11.050	

$$M = \frac{\phi(20-24)}{n(20-24)}$$

le rapport de la fécondité observée à la fécondité naturelle à l'âge 20-24

$$m = \frac{1}{5} \cdot \sum_{x=25-29}^{45-49} \frac{\ln\left(\frac{\phi(x)}{M \cdot n(x)}\right)}{\upsilon(x)}$$

la moyenne arithmétique des déviations du standard υ(a) aux âge après 25 ans

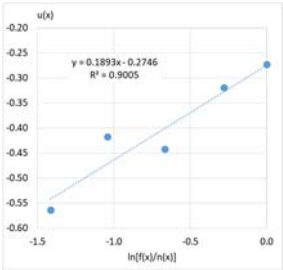
sinon, on les estime comme les paramètres de la régression en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO)

Estimation de M et m avec la méthode de MCO

$$\ln \frac{\phi(x)}{n(x)} = \ln M + m \cdot \upsilon(x)$$

Age	*ϕ(x)*	*υ(x)*	*ln[ϕ(x)/n(x)]*
20-24	0.350	0	-0.273
25-29	0.313	-0.279	-0.320
30-34	0.254	-0.667	-0.442
35-39	0.212	-1.042	-0.418
40-44	0.095	-1.414	-0.564

$\ln M = -0{,}275$ → $M = 0{,}760$; $m = 0{,}189$



Interprétation:

Le niveau de la fécondité à l'âge 20-24 est 76% de la fécondité naturelle et la structure de la fécondité par âge se diffère peu de celle de la fécondité naturelle

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 74

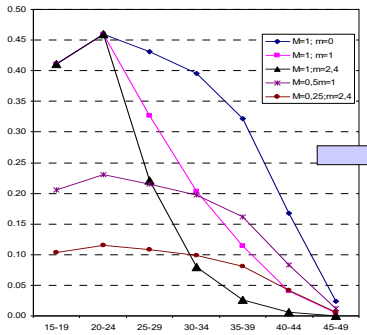
74

Application du modèle Coale–Trussell pour la projection et analyse :

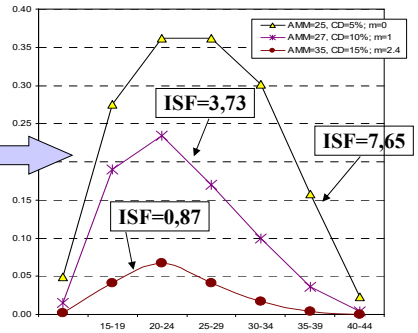
Soit $G(x)$ – fonction de la proportion de non célibataires à l'âge x
$\phi(x)$ – fonction de la fécondité de non célibataire (fécondité « légitime »)
$f(x)$ – fonction de (densité de) fécondité

$$f(x) = G(x) \cdot \phi(x)$$

Taux de fécondité en mariage à partir du modèle



Taux de fécondité à partir des modèles de nuptialité et de fécondité



Ce modèle présente bien le recours à la limitation délibérée des naissances (la parité) :

m–paramètre contrôle le recours à l'arrêt de fécondité (« stop-modèle » de limitation) ;

M–paramètre contrôle le recours aux changements du calendrier (limitation par espacement des naissances)

Précisions des fonctions types dans le modèle de Coale – Trussel

Yu Xie and Ellen Efron Pimentel, "Age Patterns of Marital Fertility: Revising the Coale-Trussell Method" *Journal of the American Statistical Association* , Dec., 1992, Vol. 87, No. 420 (Dec., 1992), pp. 977-984

Données : Word Fertility Survey, 1974-1982, femmes de 15 à 50 ans, 42 pays

Méthode : estimation du nombre de naissances (***B***) à la place des taux (***R***) sachant que $B_{x,i} = R_{x,i} \cdot T_{x,i}$
où $T_{x,i}$ - nombre de femmes exposées à l'âge ***x*** dans une population ***i***

Donc l'équation d'origine (avec ces symboles) devient : $R_{x,i} = \dfrac{B_{x,i}}{T_{x,i}} = M_i \cdot n_x \cdot \exp(m_i \cdot \upsilon_x)$

L'objet d'étude s'exprime comme le suit : $\ln(B_{x,i}) = \ln(T_{x,i} \cdot n_x) + \ln M_i + m_i \cdot \upsilon_x$

Si les paramètres n_x et υ_x sont parfaitement connus, et les naissances sont distribuées selon la loi de Poisson dans chaque intervalle d'âge et dans chaque populations, il possible d'estimer les paramètres M_i et m_i avec la méthode de maximum vraisemblance comme l'origine et la pente d'un équation log-linéaire

Résultats :

Une variation significative du paramètre υ_x en fonction des méthodes d'estimation et un effet de l'hétérogénéité des population ont été notifiés

Source of estimation	Age 20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	45–49
Estimates of the n_x parameters[a]						
Coale and Trussell (1974)	.460	.431	.395	.322	.167	.024
Xie (1990)	.460	.436	.392	.333	.199	.043
Estimates of the v_x parameters[b]						
Coale and Trussell (1974)	0	−.279	−.677	−1.042	−1.414	−1.671
Xie (1991)[c]	0	−.320	−.787	−1.216	−1.657	−1.671
Xie (1991)[d]	0	−.228	−.533	−.856	−1.279	−1.671
Model A3, Table 1	0	−.392	−.924	−1.437	−1.671	−.015
Model B3, Table 1	0	−.329	−.713	−1.194	−1.671	−1.082
Averaging method[e]	0	−.335	−.717	−1.186	−1.671	−1.115

[a] Estimates of the n_x parameters are standardized to be .460 at ages 20–24.
[b] Estimates of the v_x parameters are standardized to be 0 at ages 20–24 and to have a minimum of −1.671. See text for explanation.
[c] The estimation was based on Coale and Trussell's (1974) controlled fertility data and their natural fertility standard.
[d] The estimation was based on Coale and Trussell's (1974) controlled fertility data and Xie's (1990) natural fertility standard.
[e] The averaging method is identical to that of Coale and Trussell (1974) now applied to the WFS country data. Xie's (1990) n_x estimates are used.

Modèle relationnel gompertzien de William Brass[1)]

William Brass,
05 sept 1921 -11 nov1999

- Réduire le nombre des paramètres de quatre (modèle de Coale-Trussell) à trois

soit *F(x)* → Taux de fécondité cumulée à l'âge exacte *x* (la fonction de descendance) et

TF → la descendance finale = *F(50)*

Idée de W. Brass: la structure de la fécondité atteinte à l'âge ***x*** (fonction du calendrier de naissances réduites) suit la loi de distribution de Gompertz

$$\frac{F(x)}{TF} = \frac{\sum_{a=15}^{x} f(a)}{\sum_{a=15}^{50} f(a)} = e^{A^{C \cdot x}} = \exp\left[A \cdot \exp(B \cdot x)\right]$$ où A et B sont des constantes (paramètres) avec A<0

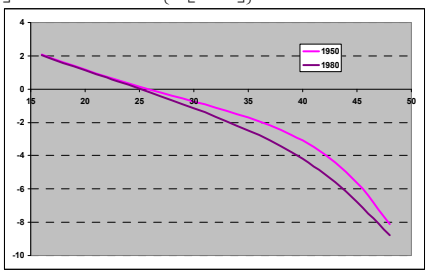
Avec quelques transformations on obtient : $\ln\left[\frac{F(x)}{TF}\right] = A \cdot \exp(B \cdot x) = \ln\left\{\ln\left[\frac{F(x)}{TF}\right]\right\} = \ln(-a) + B \cdot x$

Soit η (éta) – transformation par double logarithme de l'équation initiale, on peut écrire donc :

$\eta[F(x)] = \ln(-A) + B \cdot x$ → une fonction linéaire

Par conséquent toutes les fonctions de calendrier représentent une transformation linéaire d'une seule fonction dite « standard »

$$\eta\left[F(x)\right] = \alpha + \beta \cdot \eta\left[F^{S}(x)\right]$$

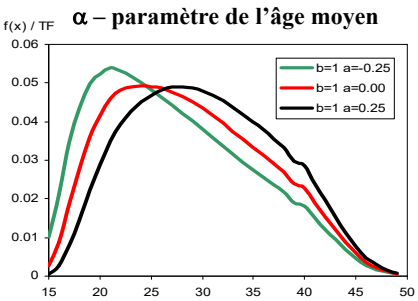


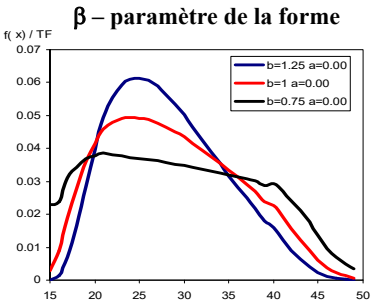
1) John Cleland, William Brass 1921-1999, *Population Studies*, 2000, v.54, no 2, p.129-131
Bill Brass – Wikipédia https://en.wikipedia.org/wiki/Bill_Brass

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 77

77

Application du modèle de la fécondité de W. Brass pour la projection:





Étapes de travail :

1. Trouvez la fécondité standard
2. Estimez les paramètres α et β pour voir leur tendance
3. Formulez les hypothèses sur les changements de α et β
4. Estimez la distribution de la fécondité par âge à partir des valeurs α et β
5. Formulez les hypothèses sur la dynamique de l'ISF
6. Calculez des taux de fécondité par âge pour la projection

Avantages :

1. Ne prend pas en considération la nuptialité : on peut travailler avec la fécondité par âge
2. Peut servir pour l'interpolation des taux de fécondité : passer des taux par groupe d'âge aux taux par année d'âge
3. Peut servir pour l'extrapolation des taux de fécondité : estimer les taux de fécondité par âge de cohortes qui n'ont pas encore atteint fin de l'âge fécond

Cours « Modèles de populations » par Alexandre Avdeev, IDUP (Master de démographie) 78

78

Autres approches à la modélisation de la fécondité

Revue dans Jane A. Menken "Biometric Models of Fertility", *Social Forces*, Vol. 54, No. 1 (Sep. 1975), pp. 52-65

Lecture :

Brass, W. 1968. "Note on Brass Method of Fertility Estimation." In William Brass, et al., *The Demography of Tropical Africa*. Princeton: Princeton University Press

Brass, W., and A. J. Coale. 1968. "Methods of Analysis and Estimation." In William Brass et al., *Demography of Tropical Africa*. Princeton: Princeton University Press.

Romaniuk, A. 1973. "A Three-Parameter Model for Birth Projections." *Population Studies* 27(November):467-70.

L'ajustement avec le polynôme de second degré (Brasse, 1968)

$$f(x) = C \cdot (x - x_0) \cdot (x_0 + 33 - x)^2$$

C – le paramètre du niveau ;
X_0 – l'âge initiale de la fécondité ;
X – l'âge ;
f(x) – le taux de fécondité

} convient pour les populations avec la fécondité assez élevée

Input :

C = 0,0001

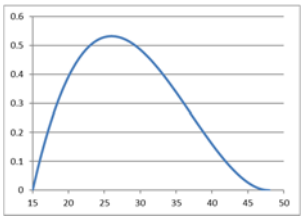
X_0 = 15

Output :

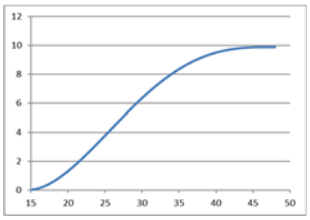
TFT = 9,875

AMF = 28,21

Taux de fécondité par âge



Cumul des taux de fécondité par âge



Voir aussi l'ajustement (interpolation des taux par groupe d'âge quinquennaux) avec le polynôme de 3e degrés (Avdeev, Troitskaia http://dmo.econ.msu.ru/Teaching/demo/index.htm)