Méthode des composants

Cohort Component Projection

Inventée par

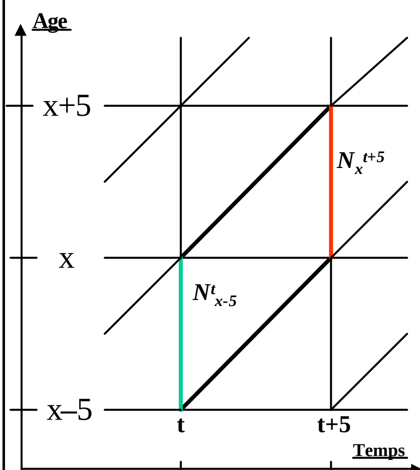
(1926) Sven D.Wicksell – « Sveriges framtida befolking under olika förutsattingar » *Economisk Tiddskrift*, vol.28, n° 1, p.91-123

(1928) Whelpton – “Population of the United States, 1925-1975” *The American Journal of Sociology*, 1928, Vol.34, p.253-270

(1936) Pascal K. Whelpton – “An Empirical Method for Calculating Future Population” *Journal of American Statistical Association*, 1936, Vol.31, p.457-473

I. Projection de la population féminine fermée sans migration

Étape 1 : projection des survivants vers la fin de l’intervalle



$$\boxed{{}_5N_x^F(t+5) = {}_5N_{x-5}^F(t)\cdot\frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}}$$

$$\frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}$$

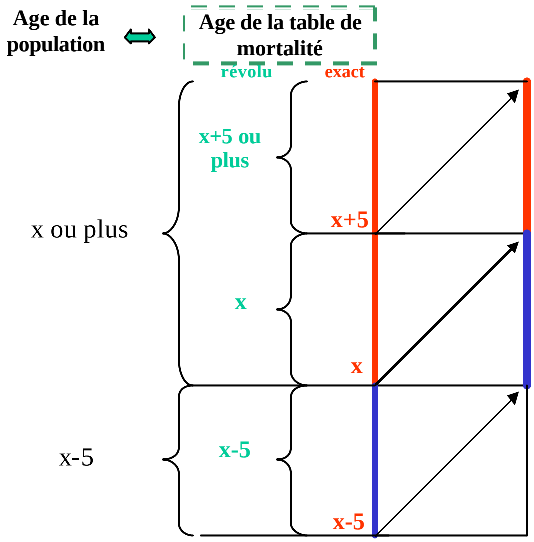
Le rapport de survie : la proportion de personnes à l’âge entre ***x-5*** et ***x*** restant en vie au bout de 5 ans dans la *population stationnaire* correspondant à la table de mortalité.

$$\frac{{}_5N_x^F(t+5)}{{}_5N_{x-5}^F(t)} = \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}$$

L’hypothèse de la stationnarité – les conditions de la mortalité sont exactement décrites avec la fonction de mortalité ***μ(x)*** et la distribution de la population par âge à l’intérieur de l’intervalle de ***x-5*** à ***x*** serait la même que la population stationnaire de la table de mortalité

<u>Étape 1 (suite) :</u> Effectif du dernier intervalle d'âge

L'intervalle fermé – ouvert : p.ex. → « 65 ans ou plus »



<u>Nouveau 65 et +</u>

=

Survivants de l'ancien group 65 et +

+

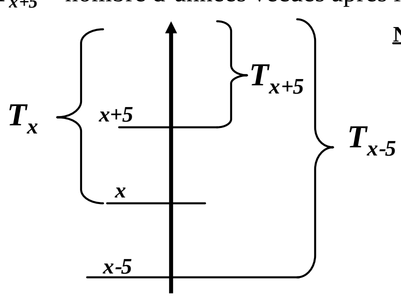
Survivants du groupe 60-64

Calculs de l'effectif de l'intervalle d'âge « fermé-ouvert »

I. $${}_5N_x^F(t+5) = \left[{}_5N_{x-5}^F(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} \right] + \left[{}_\infty N_x^F(t) \cdot \frac{T_{x+5}}{T_x} \right]$$

$\boldsymbol{T_x}$ – nombre d'années vécues après l'âge exacte $\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{T_{x+5}}$ – nombre d'années vécues après l'âge exacte $\boldsymbol{x+5}$



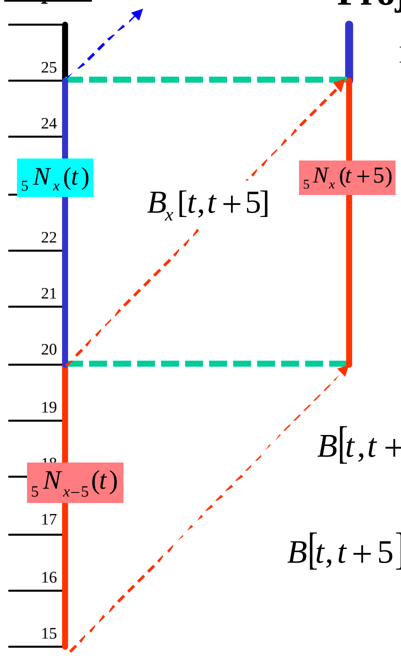
<u>**Nota :**</u> cette procédure demande que *l'intervalle fermé-ouvert de la table de mortalité* ***soit de 5 ans plus âgé*** que dans la population à projeter

Si ce détail n'est pas disponible, on suppose que la stationnarité commence à l'âge *x-5*

II. $${}_5N_x^F(t+5) = \left[{}_5N_{x-5}^F(t) + {}_\infty N_x^F(t) \right] \cdot \frac{T_x}{T_{x-5}}$$

Étape 2:

Projection du nombre de naissances



Nombre d'enfants nés par les femmes âgées de *x* à *x+5* ans révolus durant 5 ans :

$$B_x[t,t+5] = {}_5F_x \cdot 5 \cdot \left[\frac{{}_5N_x^F(t) + {}_5N_x^F(t+5)}{2}\right] \rightarrow$$

$$B_x[t,t+5] = {}_5F_x \cdot \frac{5}{2} \cdot \left[{}_5N_x^F(t) + {}_5N_{x-5}^F(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}\right]$$

où $\boldsymbol{F_x}$ – taux de fécondité à l'âge x, x+5 ans révolus

Nombre total d'enfants nés durant 5 ans :

$$B[t,t+5] = \frac{5}{2} \cdot \sum_{x=a}^{w-5} {}_5F_x \cdot \left[{}_5N_x^F(t) + {}_5N_x^F(t+5)\right] \Rightarrow$$

$$B[t,t+5] = \frac{5}{2} \cdot \sum_{x=a}^{w-5} {}_5F_x \cdot \left[{}_5N_x^F(t) + {}_5N_{x-5}^F(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}\right]$$

Étape 2 (suite):

Calcul du nombre de naissances féminines

Nombre total de ***naissances des filles*** on obtient en multipliant le nombre de naissance par le rapport des sexes à la naissance (***RSN***).

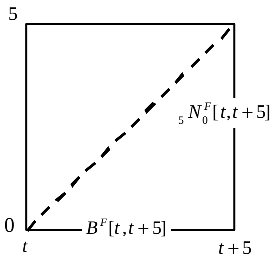
$$B^F[t,t+5] = \frac{1}{1+RSN} \cdot B[t,t+5]$$

Formule générale pour le nombre de naissances féminines :

$$B^F[t,t+5] = \frac{1}{1+RSN} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sum_{x=a}^{w-5} {}_5F_x \cdot \left[{}_5N_x^F(t) + {}_5N_{x-5}^F(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}\right]$$

Étape 3:

Projection de l'effectif de la population 0-4 ans



Le nombre des filles à l'âge 0-4 ans révolus on obtient à partir de la table de mortalité en appliquant l'hypothèse de stationnarité en multipliant le nombre de naissances des filles par le rapport entre le nombre des survivants $_0\boldsymbol{L_5}$ et ***cinq racines*** de la table $\boldsymbol{S_0}$.

$$_5N_0^F(t+5) = B^F[t,t+5]\cdot\frac{_5L_0}{5\cdot S_0}$$

$$_5N_0^F[t,t+5]=\frac{1}{1+RSN}\cdot\frac{\cancel{5}}{2}\cdot\sum_{x=a}^{w-5}{}_5F_x\cdot\left[{}_5N_x^F(t)+{}_5N_{x-5}^F(t)\cdot\frac{_5L_x}{_5L_{x-5}}\right]\cdot\frac{_5L_0}{\cancel{5\cdot}S_0}$$

où on peut supprimer le cinq dans le numérateur et dans le dénominateur, or

$$_5N_0^F[t,t+5]=\frac{_5L_0}{2\cdot S_0}\cdot\frac{1}{1+RSN}\cdot\sum_{x=a}^{w-5}{}_5F_x\cdot\left[{}_5N_x^F(t)+{}_5N_{x-5}^F(t)\cdot\frac{_5L_x}{_5L_{x-5}}\right]$$

Ou encore mieux:

$$_5N_0^F[t,t+5]=\frac{0{,}5\cdot{}_5L_0}{S_0\cdot(1+RSN)}\cdot\sum_{x=a}^{w-5}{}_5F_x\cdot\left[{}_5N_x^F(t)+{}_5N_{x-5}^F(t)\cdot\frac{_5L_x}{_5L_{x-5}}\right]$$

II. Trois possibilités de projection de la population fermée à deux sexes.

1er possibilité : Projeter la population masculine de même façon que la population féminine, mais en utilisant les tables de mortalité masculin et *en appliquant les taux de fécondité masculine*.

Problème : la projection de naissance indépendamment pour les hommes et pour les femmes *ne donne pas nécessairement le rapport de sexes plausible*

2e possibilité : Projection avec la domination féminine. Projeter la population masculine en utilisant les tables de mortalité masculine et obtenir le nombre de naissance de sexe masculin en appliquant le rapport de sexes à la naissance aux naissances produites par la population féminine avec les taux de fécondité féminine.

3e possibilité : Projection avec la domination masculine. Projeter la population masculine en utilisant les tables de mortalité masculine et les taux de fécondité masculine, ensuite, obtenir le nombre de naissance de sexe féminin en appliquant le rapport de sexe à la naissance aux naissances produites par la population masculine.

Projection avec la domination féminine

1. Étape : projection des survivants vers la fin de l'intervalle

$$ {}_5N_x^M(t+5) = {}_5N_x^M(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} $$

et pour l'intervalle fermé-ouvert :

$$ {}_5N_x^M(t+5) = \left({}_5N_{x-5}^M(t) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} \right) + \left({}_\infty N_x^M(t) \cdot \frac{T_{x+5}}{T_x} \right) $$

2. Étape : projection de nombre des naissances des garçons
en utilisant le rapport des sexes à la naissance

$$ B^M[t, t+5] = \frac{RSN}{1+RSN} \cdot B[t, t+5] $$

3. Étape : projection des survivants à l'âge 0-4 vers la fin
de l'intervalle de temps

$$ {}_5N_0^M(t+5) = B^M[t, t+5] \cdot \frac{{}_5L_0}{5 \cdot S_0} $$

Projections des populations ouvertes pour la migration

1. Prise en considération de l'émigration:

Il est facile de prendre en compte l'émigration en utilisant *les tables de mortalité à l'extinction multiple (des sorties multiples)* qui contiennent les probabilités de mourir et les probabilités de partir vers la fin d'un intervalle d'âge.

$$\frac{{}_5N_x^F(t+5)}{{}_5N_{x-5}^F(t)} = \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}$$

$$ {}_nL_x = 0{,}5 \cdot S_x(2 - {}_nq_x^m - {}_nq_x^e) = $$
$$ = S_x(1 - 0{,}5 \cdot {}_nq_x - 0{,}5 \cdot {}_nq_x^e) $$

${}_nq_x^m$ - la probabilité *nette* de décès entre les âges exacts ***x*** et ***x+n***

${}_nq_x^e$ - la probabilité *nette* d'émigrer entre les âges exacts ***x*** et ***x+n***

2. Problèmes posés par l'immigration

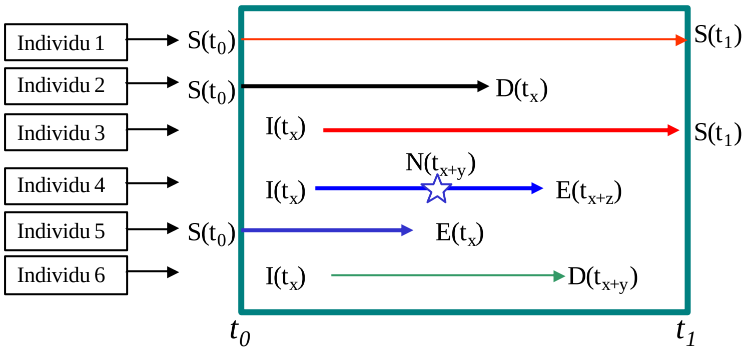
Les individus *déjà présents* dans la population *ne sont pas soumis au risque de l'immigration*.
Donc sur le plan démographique les flux d'immigration ne donnent pas les mêmes avantages que la mortalité et la fécondité puisque ils *dépendent de la politique d'immigration imposant souvent des quotas d'entrée en nombre absolu*.

Rappel : les indicateurs relatifs à l'immigration sont ***les ratios*** (comme le rapport des sexes)

$$Ratio = \frac{A}{B}; \qquad A \notin B$$

3. Migration comme un processus continu

La migration affecte les populations sous les risques de mourir et de donner naissance. Si la migration se produisait exactement à la fin d'intervalle d'âge (de temps), il serait facile d'ajuster la projection en additionnant des émigrés et en soustrayant des immigrés. Mais comme ils sont ***<u>répartis dans le temps</u>***, ils peuvent donner les naissances et mourir avant la fin de la période de projection.



Solution conventionnelle pour les processus continus

On divise les migrants (solde) en deux parties égales, en supposant que la moitié d'eux sont arrivés exactement en début d'intervalle et la deuxième moitié est arrivée exactement à la fin d'intervalle et n'affectait donc pas les décès, ni naissances.

Donc le nombre de survivants vers l'âge x+5 sera égale à

$$ {}_5N_x^F(t+5) = \left[\left({}_5N_{x-5}^F(t) + \frac{{}_5I_{x-5}^F[t,t+5]}{2} \right) \cdot \frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}} \right] + \frac{{}_5I_x^F[t,t+5]}{2} $$

Il faut faire les mêmes calculs pour l'intervalle fermé – ouvert

Ajustement du nombre de naissances

- les immigrants arrivés à la fin d'intervalle n'affectent pas le nombre de naissance;
- les immigrants arrivés en début de l'intervalle de temps avaient *la même fécondité et la même mortalité que les résidents*

$$\Delta B[t,t+5]=\sum_{x=a}^{w-5}\frac{5}{4}\cdot{}_5F_x\cdot\left({}_5I_x^F(t)+{}_5I_{x-5}^F(t)\cdot\frac{{}_5L_x}{{}_5L_{x-5}}\right)$$

? B peut être ***négatif ,*** si le solde migratoire est négatif

Population 0-4 ans ajustée à la migration

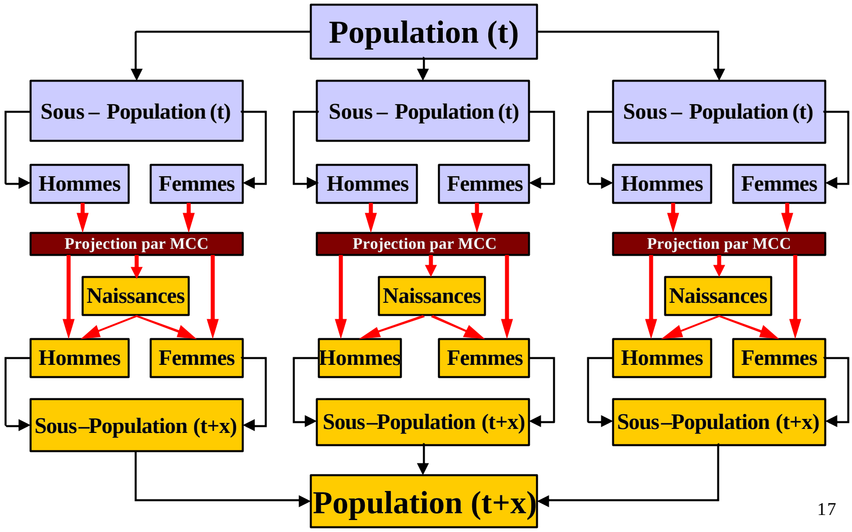
On corrige ensuite le nombre de survivants à l'âge 0-4 dans la population féminine en y ajoutant la moitié des migrants :

$${}_5N_0^F(t+5)=B^F[t,t+5]\cdot\frac{{}_5L_0}{5\cdot S_0}+\frac{{}_5I_0^F[t,t+5]}{2}$$

C'était une approche simplifiée, applicable si la distribution des migrants est suffisamment ***aléatoire*** et elle ne varie pas beaucoup à l'intérieur des âges quinquennaux .

Possibilités d'approfondissement du méthode:

La désagrégation de la population en sous-populations selon
<u>les caractères qui ne changent pas durant la vie</u>



Présentation matricielle de la projection des composants

$$B[t,t+15]=\frac{15}{2}\cdot F_2\cdot\left(W_2(t)+W_1(t)\cdot\frac{L_2}{L_1}\right)+\frac{15}{2}\cdot F_3\cdot\left(W_3(t)+W_2(t)\cdot\frac{L_3}{L_2}\right)=$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\left(F_2\cdot W_2(t)+F_2\cdot W_1(t)\cdot\frac{L_2}{L_1}+F_3\cdot W_3(t)+F_3\cdot W_2(t)\cdot\frac{L_3}{L_2}\right)=$$

$$=\frac{15}{2}\cdot\left[F_2\cdot W_1(t)\cdot\frac{L_2}{L_1}+W_2(t)\cdot\left(F_2+F_3\cdot\frac{L_3}{L_2}\right)+F_3\cdot W_3(t)\right]$$

$$B[t,t+n]=k\cdot\left[F_a\cdot W_{a-1}(t)\cdot\frac{L_a}{L_{a-1}}+W_a(t)\cdot\left(F_a+F_{a+1}\cdot\frac{L_{a+1}}{L_a}\right)+\ldots+W_{b-n}(t)\cdot\left(F_{b-n}+F_b\cdot\frac{L_b}{L_{b-n}}\right)+F_b\cdot W_b(t)\right]$$

$$W_i(t+n)=W_{i-n}(t)\cdot\frac{L_i}{L_{i-n}}$$

$$W_w(t+n)=W_{w-n}(t)\cdot\frac{L_w}{L_{w-n}}+W_w(t)\cdot\frac{T_{w+1}}{T_w}$$

Matrice de Leslie

$$\begin{pmatrix} W_1(t+n) \\ W_2(t+n) \\ \cdots\cdot \\ W_{w-1}(t+n) \\ W_w(t+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot F_1\cdot\frac{L_2}{L_1} & k\cdot\left[F_1+F_2\cdot\frac{L_2}{L_1}\right] & \cdots & k\cdot\left[F_{w-1}+F_w\cdot\frac{L_2}{L_1}\right] & k\cdot F_w \\ \frac{L_2}{L_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{L_3}{L_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_w}{L_{w-1}} & \frac{T_w}{T_{w-1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \cdots\cdot \\ W_{w-1}(t) \\ W_w(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{W}(t+n\cdot m) = L^m \cdot \vec{W}(t)$$