Mesures de la croissance

Population moyenne, progressions arithmétique et géométriques, multiplicateur d'accroissement et le taux accroissement

Population moyenne – une statistique cruciale pour analyse démographique

Population moyenne = nombre d'années vécues dans une unité d'intervalle de temps (d'âge)

1. Moyenne arithmétique et moyenne chronologique

$$\bar{P}_{0,T} = \frac{\sum_t \bar{P}_t}{T}$$

Population moyenne (arithmétique) = moyenne des moyennes

$$\bar{P}_{0,T} = \frac{\sum_t \bar{P}_t}{T} = \frac{\left(\frac{P_0 + P_1}{2}\right) + \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{P_{T-1} + P_T}{2}\right)}{T} \Rightarrow$$

$$\bar{P}_{0,T} = \frac{0,5 \cdot (P_0 + P_T) + \sum_{t=1}^{T-1} \bar{P}_t}{T}$$

Moyenne chronologique

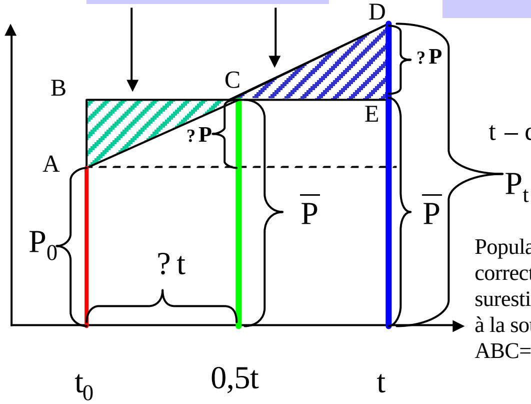
Population moyenne: croissance linéaire $\Longrightarrow$ $\bar{P}_{0,t} = \dfrac{P_0 + P_t}{2}$

$$\bar{P}_{0,t} = \frac{\sum_{t=0}^{T} P_t}{T} \Longrightarrow \bar{P} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t P(t)dt$$

$$\bar{x} \cdot n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$ABC = CDE$ → $\Delta P = \dfrac{(P_0 - P_t)}{t}$ → $\Delta P \cdot t = P_0 - P_t$

$$P_t = P_0 + \Delta P \cdot t$$



t – durée d'une période de projection

Population moyenne est une estimation correcte de nombre d'années vécues puisque la surestimation pour la première moitié est égale à la sous estimation pour la deuxième. ABC=CDE

Exemple 1: Croissance de la population en progression arithmétique

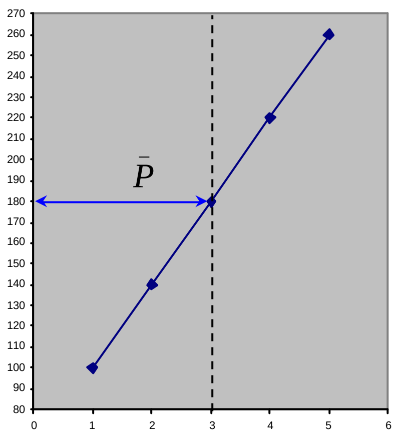
Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement	Accroissement
t	P_t	$P_{t,t+1}$	$r = (P_{t+1} -- P_t)/P_{t,t+1}$	$?P = (P_{t,t+1}) \times r$
0	100	120	0,3333	40
1	140	160	0,2500	40
2	180	200	0,2000	40
3	220	240	0,1667	40
4	260			
Total	*900*	*720*	*0,9500*	*160*
Moyenne sur 5(4)	180	180	0,2375	
Moyenne chronologique	180			
Moyenne sur extrémités	180		0,2500	
Moyenne géométrique			0,2295	

$$\bar{P}_5 = \frac{900}{5} = 180 \qquad \bar{P}_4 = \frac{720}{4} = 180 \qquad \bar{P}_{ch} = \frac{0,5 \cdot (100 + 260) + 540}{4} = 180$$

$$\Delta P_{0,T} = 260 - 100 = 160 \qquad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 160$$

Population ➔ progression arithmétique : **Taux d'accroissement** ➔ progression géométrique

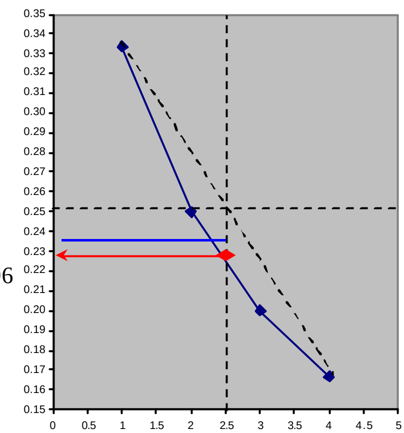
Croissance de la population



$\bar{r}_a = 0{,}238$

$\bar{r}_g = 0{,}2296$

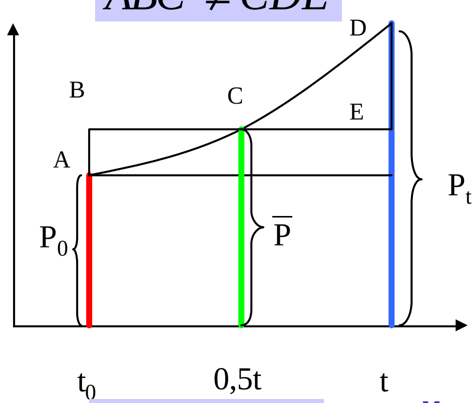
Taux de croissance



Population moyenne: croissance non linéaire

$ABC \neq CDE$

$$P_t = P_0 \cdot \left(\frac{P_t}{P_0} \right)^{\frac{t}{t}}$$ où



$$\left(\frac{P_t}{P_0} \right)^{\frac{1}{t}} = (1 + r);$$

r – *taux d'accroissement pendant la période* $[0, t]$

$$\bar{P}_{0,T} = \sqrt[t]{\prod_{t=0}^{T} P_t}$$

Moyenne géométrique

$$\ln \bar{P}_{0,T} = \frac{\sum_{t=0}^{T} \ln P_t}{T}$$

Exemple 2: Croissance de la population en progression géométrique

	Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement	Accroissement
	t	P_t	$P_{t,t+1}$	r = (Pt+1 – Pt)/Pt,t+1	? P = (Pt,t+1) x r
	0	100	115	0,2609	30
	1	130	149,5	0,2609	39
	2	169	194,4	0,2609	50,7
	3	219,7	252,7	0,2609	65,91
	4	285,6			
	Total	*904,31*	*711,5*	*1,0435*	*185,61*
Moyenne sur 5(4)		180,9	177,88	0.2609	
Moyenne chronologique		177,9			
Moyenne sur extrémités		192,8	183,83		
Moyenne géométrique		169,0		0.2609	

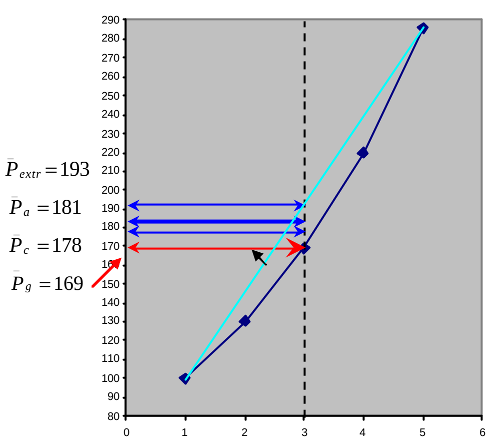
$$\bar{P}_5 = \frac{904{,}34}{5} = 180{,}9 \qquad \bar{P}_4 = \frac{711{,}5}{4} = 177{,}88 \qquad \bar{P}_{ch} = \frac{0{,}5 \cdot (100 + 285{,}6) + 518{,}7}{4} = 177{,}8$$

$$\Delta P_{0,T} = 285{,}6 - 100 = 185{,}61 \qquad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 185{,}61$$

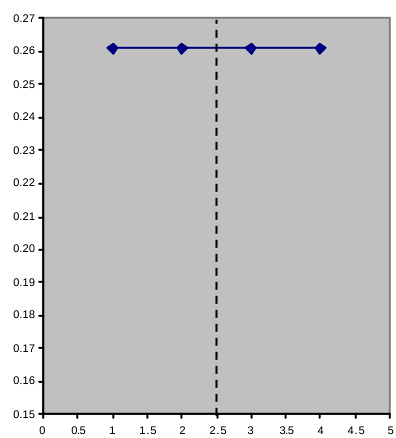
$$\bar{P}_g = \sqrt[T]{\prod_t P_t} = 169 \qquad \bar{P}_g = \exp\left(\frac{\sum_{t=0}^{T} \ln(P_t)}{T} \right) = 169$$

Population ➔ progression géométrique **: Taux d'accroissement ➔** constant
« population malthusienne »

Croissance de la population



Taux de croissance



Exemple 3: Population exponentielle

Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement	Accroissement
t	P_t	$P_{t,t+1}$	r = (Pt+1 – Pt)/Pt,t+1	? P = (Pt,t+1) x r
0	100	107,5	0,1395	15
1	115	127,5	0,1961	25
2	140	155,0	0,1935	30
3	170	190,0	0,2105	40
4	210			
Total	*735*	*580*	*0,7397*	*110*
Moyenne sur 5(4)	147	145	0,1849	
Moyenne chronologique	145			
Moyenne sur extrémités	155	148,75		
Moyenne géométrique	141,87		0,1827	

$$\bar{P}_5 = \frac{735}{5} = 147 \qquad \bar{P}_4 = \frac{580}{4} = 145 \qquad \bar{P}_{ch} = \frac{0,5\cdot(100+210)+518,7}{4} 425 = 145$$

$$\Delta P_{0,T} = 210 - 100 = 110 \qquad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 110$$

$$\bar{P}_g = \sqrt[T]{\prod_t P_t} = 141,87$$

Population exponentielle avec le taux d'accroissement variable

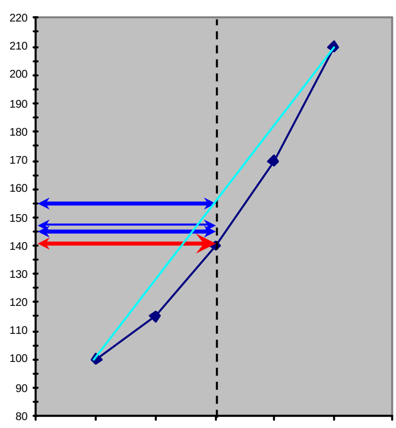
Croissance de la population

$\bar{P}_{extr} = 155$

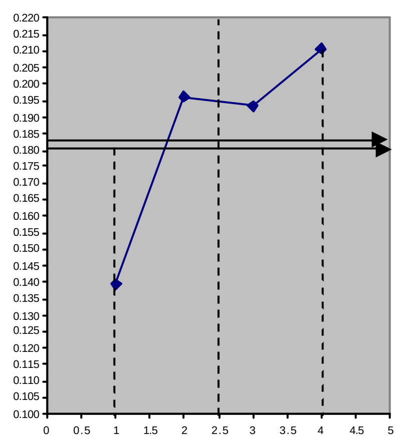
$\bar{P}_a = 147$

$\bar{P}_c = 145$

$\bar{P}_g = 142$

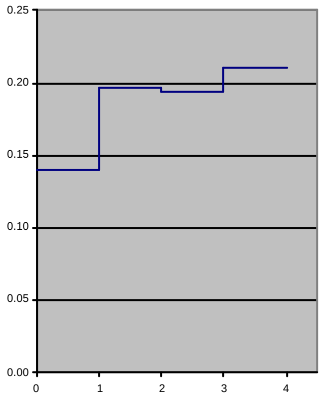


Taux de croissance



Hypothèses sur la croissance de la population dans le cas où nous ne disposons que des données pour le début et la fin d'une période

<u>Hypothèse 1:</u>
le taux d'accroissement est constant à l'intérieur de chaque intervalle de temps



<u>Hypothèse 2:</u>
la population s'accroît selon la loi exponentielle dans chaque intervalle de temps

alors $k = \left(\frac{P_T}{P_0}\right)^{\frac{1}{T}}$ où k est un multiplicateur d'accroissement

or $P(t) = P_0 \cdot \left(\frac{P_T}{P_0}\right)^{\frac{t}{T}} = P_0 \cdot k^t$

Si la croissance est continue on a par conséquent

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P_0 \cdot \left(\frac{P_t}{P_0}\right)^{\frac{t}{T}} dt \Rightarrow \tilde{P} = \frac{P_T - P_0}{\ln(P_T) - \ln(P_0)}$$

Rappel

Équation de bilan démographique

$$P_t = P_0 + N_{0,t} - D_{0,t} + I_{0,t} - E_{0,t}$$

P_t – nombre de personnes survécues jusqu'en le moment t

P_0 – nombre de personnes survécues jusqu'en le moment 0

$N_{0,t}$ – nombre de naissances durant la période entre 0 et t

$D_{0,t}$ – nombre de décès durant la période entre 0 et t

$I_{0,t}$ – nombre migrants arrivés durant la période entre 0 et t

$E_{0,t}$ – nombre migrants partis durant la période entre 0 et t

Croissance exponentielle de la population

$$r = \frac{N-D}{T\cdot \bar{P}}$$ - taux d'accroissement

Si l'intervalle de temps T→0 (nous considérons un intervalle infiniment petit) alors

$$\lim_{T\to 0}\frac{N}{T} \quad \text{et} \quad \lim_{T\to 0}\frac{D}{T}$$

sont les densités des naissance et des décès pour un moment de temps infiniment court

et

$$\lim_{T\to 0}\frac{N-D}{T} \to \frac{dP(t)}{dt} = P'(t)$$

est l'accroissement de la population pour un moment de temps infiniment court

donc

$$r = \frac{N-D}{T\cdot \bar{P}} \to \frac{P'(t)}{P(t)}$$

la dérivée logarithmique de l'effectif de la population

$$r = \ln\frac{P_1}{P_0} \to e^r = \frac{P_1}{P_0}$$

$$P_1 = P_0 \cdot e^r$$

Croissance exponentielle de la population: suite

$$r = \frac{P_t - P_0}{T\cdot \bar{P}_{0,t}} = \frac{N_{0,t} - D_{0,t} + I_{0,t} - E_{0,t}}{T\cdot \boxed{\bar{P}_{0,t}}}$$

et comme

Croissance géométrique

$$\bar{P}_{0,t} = \frac{P_t - P_0}{\ln(P_t) - \ln(P_0)}$$

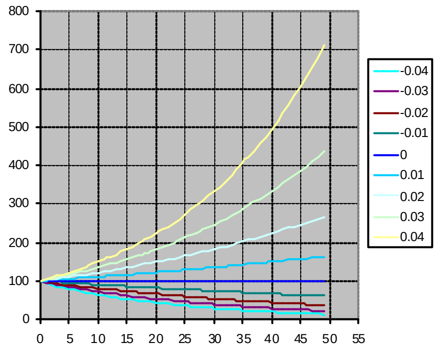
$$r = \frac{\cancel{(N-D+I-E)}(\ln P_t - \ln P_0)}{T\cdot \cancel{(N-D+I-E)}}$$

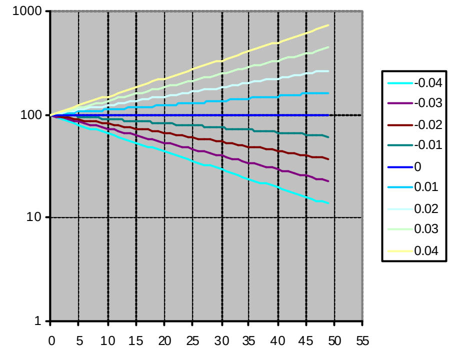
$$\left.r\cdot t = \ln\left(\frac{P_t}{P_0}\right) \to e^{rt} = \frac{P_t}{P_0}\right\}$$

$$P(t) = P(0)\cdot e^{r\cdot t}$$

Modèle de croissance avec le taux de accroissement constant:

conversion des modèles non linéaires en modèles linéaires





Période de doublement de l'effectif

$$\begin{cases} Si \quad P(t) = 2P(0) \Rightarrow 2 = e^{rt} \\ t = \dfrac{\ln 2}{r} \end{cases} \quad t = \frac{0.693}{r}$$

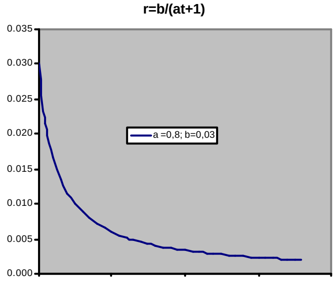
Modèle de croissance avec le taux de accroissement variable

Model de la population exponentielle avec le taux accroissement constant présente les populations qui n'ont pas de limites de la croissance. Cela n'est pas réaliste.

L'hypothèse: le taux de accroissement change dans le temps.

$$P_t = P_0 \cdot e^{r_0 \cdot \Delta t} \cdot e^{r_1 \cdot \Delta t} \cdot e^{r_2 \cdot \Delta t} \ldots = P_0 \cdot e^{r_0 \cdot \Delta t + r_1 \cdot \Delta t + \Delta t + \ldots}$$

r=b/(at+1)



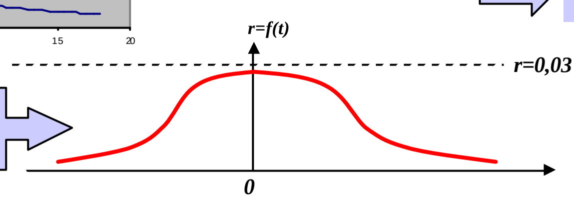
puisque $\Delta t \to 0$

$$P_t = P(0) \cdot e^{\int_0^t r(t)\,dt}$$

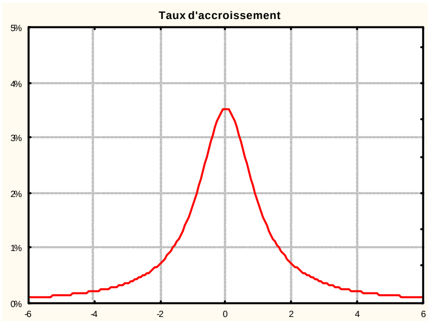
r ➔ peut être déterminé avec une fonction analytique ***r = f(t)***

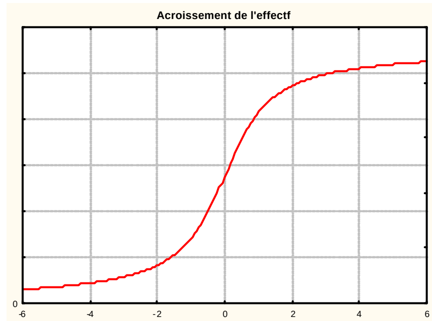
Table de mortalité

Transition démographique



Les limites d’accroissement : un modèle de la transition démographique





A la recherche des limites pour la croissance: modèle logistique…

A. Quételet, 1835 *Sur l’homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale.* Paris, 1835, t.I et II

la résistance ou la sommes des obstacles pour la croissance est égale au carré de vitesse de la croissance de population…

Pierre-François Verhulste (1804-1849): « Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. » Dans: *Correspondance mathématique et physique publiée par A.Quételet.* Vol.XVIII, Bruxelles, 1847

$$dP(t) = \left[r \cdot P(t) - k \cdot P^2(t)\right] dt$$

La solution de cette équation donne $P(t) = \dfrac{K}{1+e^{a-r\cdot t}}$ où

K est la limite de croissance :

$$K = \frac{r}{k} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} P(t)$$

a - paramètre déterminé par l’écart initial entre la P(0) et K

si $a=0$ → $P(0) \approx 0{,}5K$

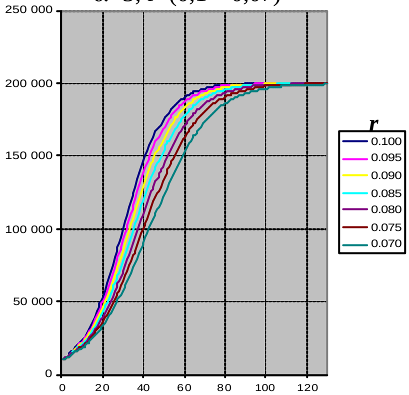
Modèle logistique

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{a - r \cdot t}}$$

K=200 000

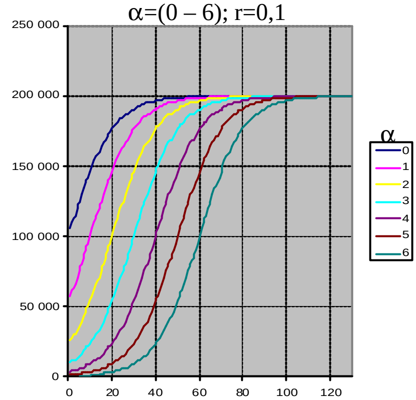
1. Les effectifs initiaux et finaux sont égaux, taux d'accroissement sont variables

α=3; r=(0,1 – 0,07)



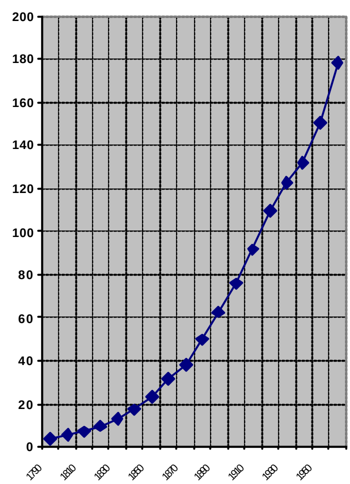
2. Les effectifs finaux sont égaux, taux d'accroissement et les effectifs initiaux sont variables

α=(0 – 6); r=0,1



Croissance de la population des États Unis

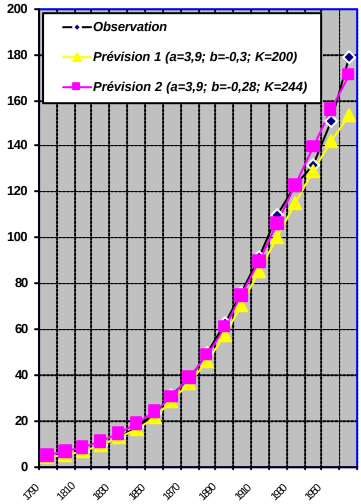
Année	Population	Décennie
1790	3.895	0
1800	5.267	1
1810	7.182	2
1820	9.566	3
1830	12.834	4
1840	16.985	5
1850	23.069	6
1860	31.278	7
1870	38.416	8
1880	49.924	9
1890	62.692	10
1900	75.734	11
1910	91.812	12
1920	109.806	13
1930	122.755	14
1940	131.669	15
1950	150.697	16
1960	178.464	17



Source: **<u>A.Bühl, P.Zöfel</u>** – *SPSS Version 10. Einführung in die modern Dateanalyse unter Windows* . Addison-Wesley, 2001, (Kapitel 16)

Croissance de la population
des États Unis
(application du modèle logistique)

$$P(t) = \frac{K}{1+e^{a+b\cdot t}}$$



1. Estimation initiale des paramètres

Si t=0 et P(0) = 3,895

$$3{,}895 = \frac{200}{1+e^{a}} \Rightarrow a = \ln\left(\frac{200}{3{,}895} - 1\right) = 3{,}9$$

Si t=1 et P(1) = 5,267

$$5{,}267 = \frac{200}{1+e^{3,9+b}} \Rightarrow b = \ln(5{,}267-1) - 3{,}9 = -0{,}3$$

K=200 a= 3,9 b = – 0,3

2. Estimation des paramètres par interactions dans SPSS

K=244,013 a= 3,889 b = – 0,279

Projections de population active 2003 – 2050 en France

Applications du modèle logistique

Emmanuelle Nauze-Fichet, Frédéric Lerais, Stéphane Lhermitte *Projections de population active 2003 – 2050.* (Insee. Résultats. Société N°13 *p.5*

« *Le choix d'une forme logistique* est particulièrement adapté à la description des phénomènes se diffusant progressivement dans le temps, avec une étape d'émergence, de développement et de saturation progressive. Ce choix paraît pertinent pour la description des évolutions de comportements d'activité. »

$$\mathrm{trend}(t, f, \sigma, t_i)(t) = \frac{p + f \cdot \exp(\sigma \cdot (t - t_i))}{1 + \exp(\sigma \cdot (t - t_i))}$$

avec t : le temps (0 en 1967), p : le taux limite passé, f : le taux limite futur, σ : la vitesse de diffusion, t_i : la date d'inflexion.